昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2005年11月1日発行　第43巻11号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

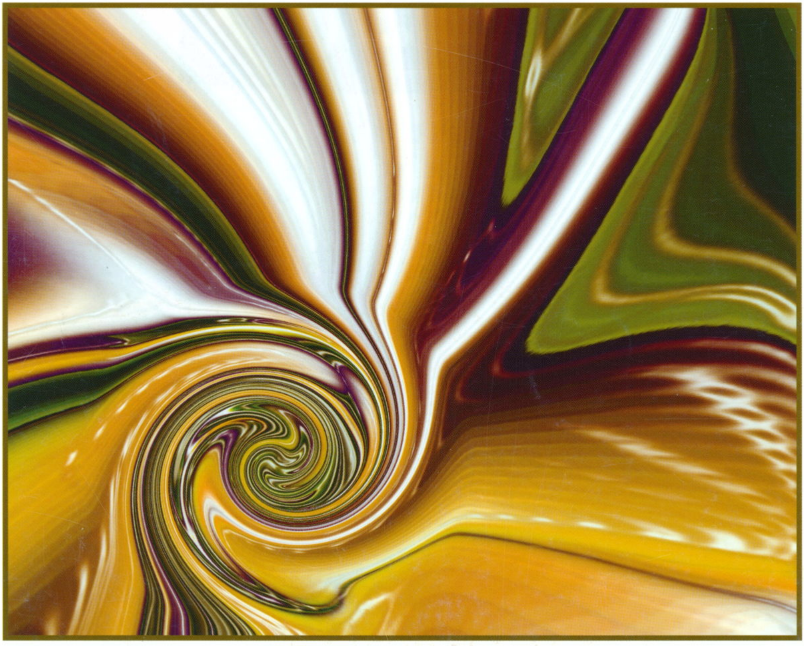
数理科学

11
2005

特集 0の発見
無限なる可能性の開花

0のある風景　渡辺　浩
なぜ我々は0を記し始めたのか？ 0の発見をめぐって　三村　太郎
無限小の概念史 不可分者から無限小へ　髙橋　秀裕
解析学における0　小谷　元子
微分方程式論における自明解　坂口　茂
幾何学における0 曲率0の不思議　谷村　省吾
量子論における0　宮沢　弘成
素粒子の0電荷問題とその解決 漸近自由理論の発見　青木　健一
統計力学におけるゼロ ゼロ点をとおしてみる相転移現象　田崎　晴明
偶然と確率 0が生み出す事象　渡辺　浩
相対論における0　平尾　淳一
宇宙の豊穣なる0　杉山　直

《確率的情報処理と統計力学》第9回　堀口　剛
《連載》計算神経科学への招待 その5　銅谷　賢治



No.509

サイエンス社

H.W.クーン／S.ナサー 編　落合卓四郎◆松島 斉 訳

the essential JOHN NASH

ナッシュは何を見たか

純粋数学とゲーム理論

●A5上製 本体3,500円 ISBN4-431-71038-8



ノーベル経済学賞を受賞した数学者ナッシュ

アカデミー賞受賞映画「ビューティフル・マインド」の主人公ナッシュの天才が燦然と輝いている歴史的大論文8本の全訳

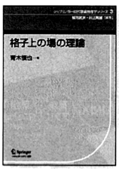
解説,自伝,プリンストン時代の写真史などを収録

まえがき・・・ハロルド・W・クーン／Introduction:ナッシュその人について・・・シルヴィア・ナサー／Chapter 1:ノーベル経済学賞記者発表・・・スウェーデン王立科学アカデミー
Chapter 2:自 伝・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア／Photo Essay:プリンストンに来てからのナッシュ写真史／Chapter 3:ゲーム「Hex」・・・ジョン・ミルナー
Chapter 4〜12:交渉問題／n人ゲームにおける均衡点／ナッシュの博士論文「非協力ゲーム」英文原版／非協力ゲーム／2人協力ゲーム／並列制御
実代数的多様体／リーマン多様体の埋め込み問題／放物型方程式と楕円型方程式の解の連続性・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア
あとがき・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア／ゲーム理論,数学,そして経済学・・・松島 斉／数学におけるナッシュの貢献について・・・落合卓四郎ほか

新刊

シュプリンガー現代理論物理学シリーズ

3 格子上の場の理論



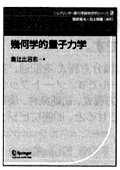
青木慎也 著

●A5上製 本体4,800円 ISBN4-431-71172-4

格子上の場の理論の基礎からモンテカルロ法まで

新刊

2 幾何学的量子力学



倉辻比呂志 著

●A5上製 本体5,200円 ISBN4-431-71171-6

経路積分とトポロジーの織りなす量子力学の世界へ

新刊

1 超弦理論・ブレイン・M理論

太田信義 著 ●A5上製 本体4,200円 ISBN4-431-70970-3



素粒子標準模型入門

新刊

W.N.コッティンガム／D.A.グリーンウッド 著
樺沢宇紀 訳

●A5 本体4,000円 ISBN4-431-71175-9

正統的で完成度の高い素粒子論の入門的教科書



フーリエ音響学

新刊

音の放射と近距離場音響ホログラフィの基礎

E.G.ウィリアムズ 著　吉川 茂／西條献児 訳

●A5 本体5,500円 ISBN4-431-71174-0

ストリング理論 第1巻

ポルチンスキー 著　伊藤克司／小竹 悟／松尾 泰 訳

●A5 本体5,500円 ISBN4-431-71152-X

金属における拡散

純金属および合金における拡散の基礎,理論,現象

Th.ホイマン 著　H.メーラー 協力　藤川辰一郎 訳

●A5 本体価格未定 ISBN4-431-71176-7 近刊

コンサートホールとオペラハウス

音楽と空間の響きと建築

レオ・L.ベラネク／日高孝之／永田 穂 著

●B5 本体価格未定 4-431-71177-5 近刊

Springer　シュプリンガー・フェアラーク東京(株) 〒113-0033 東京都文京区本郷3-3-13
Tel.03-3812-0757 Fax.03-3812-0719 http://www.springer-tokyo.co.jp

※価格は全て税別

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 509 November 2005

0の発見

無限なる可能性の開花

《特　集》

0のある風景 5 渡辺　浩
なぜ我々は0を記し始めたのか？ 0の発見をめぐって 6 三村　太郎
無限小の概念史 不可分者から無限小へ 11 髙橋　秀裕
解析学における0 17 小谷　元子
微分方程式論における自明解 22 坂口　茂
幾何学における0 曲率0の不思議 27 谷村　省吾
量子論における0 33 宮沢　弘成
素粒子の0電荷問題とその解決 漸近自由理論の発見 37 青木　健一
統計力学におけるゼロ ゼロ点をとおしてみる相転移現象 43 田崎　晴明
偶然と確率 0が生み出す事象 49 渡辺　浩
相対論における0 54 平尾　淳一
宇宙の豊穣なる0 59 杉山　直

《書　評》

H.D. エビングハウス他著，成木勇夫訳 数（上，下） 65 渡辺　浩
戸田盛和著 アインシュタイン16歳の夢 66 亀淵　迪

《リレー連載》

確率的情報処理と統計力学 様々なアプローチとそのチュートリアル⑨
統計力学の技法を用いたパケット流の制御 67 堀口　剛

《連　載》

計算神経科学への招待⑤ 小脳と内部モデル 74 銅谷　賢治

第52回理工展のお知らせ　／64
数理科学（10月号）前号案内／84
数理科学（12月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／83

表紙：戸川　隼人

別冊・数理科学

スーパーストリング

究極の統一理論を求めて

本体 1895 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

I. 序論

"ひも" の起源　そのルーツと歴史　松田　哲

II. 弦理論とは何か

点と線，そしてブレーン　超弦理論の意味　米谷　民明
弦理論による統一へのアプローチ　川合　光
超弦理論の展望　石橋　延幸
超弦理論と行列模型　北澤　良久
弦理論の構成的定式化　川合　光

III. M 理論とは何か

M 理論とは何か　風間　洋一
D–ブレーンの力学　石橋　延幸
超膜理論　松尾　泰
M 理論の行列模型　M 理論の M は Matrix の M？　大川　祐司
M 理論と弦理論の時空不確定性関係　米谷　民明

IV. 超弦理論の諸相

弦理論・超対称理論と保存則　風間　洋一
弦理論と非可換性　加藤　光裕
超弦理論とタキオン　橋本　幸士
超弦理論とヒッグス粒子　太田　信義

V. 超弦理論と量子重力

超ひも理論と量子重力　国友　浩
ゲージ理論と重力理論の双対性　江口　徹
AdS/CFT 対応　小櫛　幸子
超重力理論と厚みのあるブレーン宇宙　坂井　典佑
ブレーンワールドとブラックホール　白水　徹也

VI. ブレーンワールド・シナリオ

ブレーンワールドとは何か　佐々木　節
超弦理論（M 理論）とブレーンワールド　太田　信義
ブレーンワールドの創世と進化　衝突する 4 次元宇宙　早田次郎・菅野優美
ブレーン宇宙論　白水　徹也
これからのブレーンワールド　田中　貴浩

November 2005 MATHEMATICAL SCIENCES Number 509

特集／0の発見

0のある風景

渡辺 浩

「0」は位取り記数法における空位を埋める記号として世に現われ，代数系の基本要素として位置付けられた．また，微分積分学における無限小の概念は，そのパラドキシカルな性質ゆえに，近代的な定式化に到達するまで，極めて長い歴史を擁している．その後「0」は，数理科学においてその本来的な機能を果たしながら，ある意味で神秘的事実を象徴する存在としての役割を担ってきた．

このような「0」の働きをテーマにした特集を，というのが編集部の意向であった．しかし「0」そのものに焦点を絞って論じるということが自然にできる分野はそれほど多くないと思われる．また数理科学において「0」がおもしろいのは，「0」がその内面からオーラを放っているからというよりも，「0」の背景に重要な概念があるからだろう．即ち，何かが0になるという言明に神秘を感じ得るとすれば，その「何か」がつまらないものであるはずはなく，この「何か」こそ概念として重要であるに違いない．とすれば，「0」が象徴的な意味をもつような概念の世界を散策し，その有様を描くことは興味深いと思われる．このような次第で，「0」そのものにあまりとらわれず，「0」を共通のキーワードとする数理世界の諸断面を描き出すことを各分野の先生方へのお願いとした．

読者諸兄諸姉は，この特集において，「0」の誕生と無限小概念の歴史に続いて，数学を含む現代の数理科学のいくつかの分野における「0」の姿を目にされるだろう．そして，「0を生み出した世界」とともに「0が生み出した世界」を，また「0にならなかった0」，「実り豊かな0」など，「0」を巡って展開するストーリーを，短篇映画のオムニバスのように御覧いただけると思う．

しかしすでに記したように，「0」がおもしろいのは，その背景にある概念がおもしろいからである．したがって，どの論説も，「…における0」というタイトルによって規定されるものは実はあまり多くなく，その内容の意外さと豊かさは，執筆に当たられた先生方の創意工夫の賜である．読者諸兄諸姉も，「0」そのものにあまりとらわれることなく，11葉の「0のある風景」を楽しんでいただければ幸いである．

（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）

なぜ我々は0を記し始めたのか？

0の発見をめぐって

三 村　太 郎

1. 初めに

我々は，今日，数を表記する際，当然のように0を用いている．しかしながら，日本における数表記の状況を少し思い返してみれば，ある数を表記する際，0を使用しなくとも，漢数字でも表記できたはずである．

ここで，一つの問いが立てられるだろう．すなわち，日本において，我々は，なぜ，0を使い始め，そして，使い続けているのだろうか，と．

一方で，0は，いわゆる算用数字の一種である．そして，この算用数字は，インド・アラビア数字という呼び名を持っていることからも窺えるように，そもそも，インドに端を発し，アラビア（中世イスラーム世界）を経て，ヨーロッパへと伝わった数字である．こういった歴史の流れの中で，我々は，0を使い始め，そして，使い続けていることになる．

そこで，本稿では，インドから最初に大々的にインド数字を受け入れた中世イスラーム世界における，0を含むインド数字の扱われ方を見ることで，まず，中世イスラーム世界において，なぜ0が記し始められ，そして，記し続けられたのかという疑問に答えてみたい．そうすることで，0という存在の持つ歴史的な意義を明らかにし，ひいては，現在の我々が，なぜ，0を使い始め，使い続けているのかという疑問に答える足がかりにしたい．

2. アブー・マアシャルとインド数字

イスラームは，610年頃，ムハンマドによって創められた．そして，622年，ムハンマドとその教友たちはメディナに移住して（いわゆるヒジュラ），そこで教団国家というべきものの建設に着手すると，次第にその領土は東西へと拡大していった．その結果，エジプトからペルシャ，インドへと広がる果てしない領域を，政治的，経済的に再統合することになった．

このような巨大統合体における交流を背景として，中世イスラーム世界において，知識の伝達量が一気に高まり，その結果，多くの知識が中世イスラーム世界に流れ込むこととなった．その一つが，インド数字だった．

もちろん，中世イスラーム世界においても，数表記法として，インド数字に先立って，アラビア語の数詞で数を表記する方法は存在した．すなわち，日本と同様，中世イスラーム世界においても，インド数字は，既存の数表記体系を押しやる形で，定着していったことになる．

では，中世イスラーム世界において，どういった形で，インド数字は，既存の数表記体系を凌駕していったのだろうか．その状況を知る手がかりとして，アブー・マアシャル（787–886年）の『宗教と王朝についての書』を取り上げよう[*1)]．

アブー・マアシャルは，占星術に関して，数多くの著作を残したことで有名な学者である．特に

『占星術大序説』は，ラテン語にも訳され，ヨーロッパへも，多大な影響を与えた．

さて，『宗教と王朝についての書』だが，アブー・マアシャルは，そこにおいて，360000 年の日数を提示する際，以下のように記述している*2)．

> 三百六十千〔= 360 × 1000〕年の日数，すなわち百三十一百千千〔= 131 × 100 × 1000 × 1000〕と四百九十三千〔= 493 × 1000〕と二百四十日，インドの形〔=数字〕では 131493240

すなわち，アブー・マアシャルは，ここにおいて，その日数を，まずアラビア語の数詞で提示してから，インド数字で再提示していることになる．

このように，わざわざインド数字で書き直すという行為には，一体，いかなる意味があったのだろうか．というのは，アブー・マアシャルが，ただ，日数の値を表記したかったのならば，アラビア語の数詞で示すだけで十分だったはずである．やはり，このように，インド数字で再表記したということは，この定数を扱う際，インド数字で表記しなければならない状況にあったからだといえる．

では，どういった状況が，この場合，考えられるのだろうか．その状況を推測するためには，中世イスラーム世界におけるインド数字の位置づけへと，考察を及ぼさなければならないだろう．

そこで，中世イスラーム世界におけるインド数字の位置づけを見てみるならば，インド数字が，インド式計算法との深い関係の下，存在していたことに気づくだろう．

3. インド数字とインド式計算法

インド式計算法とは，インドに端を発する，インド数字を用いた位取り（10 進法）に基づく計算法のことである．この計算法が，今日でも使い続けられている算用数字の計算法の基礎となっていることはいうまでもないかもしれない．

もちろん，中世イスラーム世界には，インド式計算法の広まる以前から，計算法は存在した．なかでも著名なのが，「指算」という計算法で，指を様々に折りながら，数を勘定していく方法である．また，指算は，暗算の一種ということで，「空気算」とも呼ばれた*3)．

そして，指算は，暗算であるがゆえに，計算過程において，特別な数表記法を必要としなかった．実際，計算結果を示す際にも，アラビア語の数詞を用いればよかった．

一方で，インド式計算法は，位取り表記法という特別な数表記法を必要とした．なぜなら，インド式計算法は，暗算とは違って，位取りに基づいて数値を実際に書き記して，手順を踏んで，その数値を書き直していくことで，計算結果を得る方法だったからである．

例えば，アラビア語で現存する最古のインド式計算法についての著作である，クーシュヤール（1000 年頃活躍）の『インド式計算法』において紹介されている，325 × 243 の計算手順を見てみよう*4)．

そこにおいて，クーシュヤールは，まず，被乗数と乗数を，表 1 の左上のように書き記す．そして，矢印の順序に従って，太字にした箇所の数字を書き直しながら，掛け算を進めていく．

以上の例からも明らかなように，インド式計算法を遂行するためには，位取りに基づいて，数字を書いたり消したりを繰り返す必要があったことが分かる．そして，その際，書き記された数字こそが，インド数字だった．

実際，中世イスラーム世界において，インド式計算法を紹介する書物で挙げられている計算の手順を示す例は，インド数字で記されることが一般

*1) アブー・マアシャル『宗教と王朝についての書』については，ラテン語訳と英訳の付された校訂版として，文献 1) がある．また，その概要は，文献 12) で知ることができる．

*2) 文献 1) の 18～19 ページを参照．なお，引用文において，漢数字で翻訳した数値は，実際はアラビア語の数詞で記されており，算用数字で翻訳した数値は，実際はインド数字で記されている．また，〔 〕内は，引用者の追加である．

*3) 指算に関しては，文献 10) の 348～349 ページを参照．

*4) クーシュヤール『インド式計算法』については，そのアラビア語原文と英訳として，文献 4) を参照した．当該例は，文献 4) の 52～56 ページにある．なお，このクーシュヤールの紹介する計算手順は，インドにおける計算手順の一つを正確に伝えている．文献 6) の 47～51 ページを参照．

表 1　325 × 243 の計算手順.

	325 243	2×4)	**777**25 243
3×2)	**6** 325 243	2×3)	777**6**5 243
3×4)	**72**325 243	移動	77765 **243**
3×3)	72**9**25 243	5×2)	7**8**765 243
移動	72925 **243**	5×4)	78**9**65 243
2×2)	**76**925 243	5×3)	789**75** 243
	(右上へ)		答え 78975

的だった．すなわち，インド数字を書き記すことと，インド式計算法の遂行とは，不即不離の関係にあったことが理解できるだろう．また，そういったインド式計算法を紹介する書物のほとんどが，インド数字の形状の紹介から始まることも，両者の関係の深さを示唆する．

そもそも，アラビア語文献の場合，アラビア文字は右から左へと記される一方で，途中，インド数字で数を記す際，あくまでも位取りを保持して，左から右へと記されたという事実を見るだけでも，インド数字で記す特別性が見て取れる．いわば，インド数字は，位取りに従って記すべき存在として，認識されていたことになる．

やはり，インド数字は，インド式計算法を遂行する場面で，位取りに従って書き記される際に，その存在意義が発揮されたのだろう．

一方，クーシュヤールの紹介する計算手順を眺めることで，インド式計算法を遂行する際，数字を書き直したり，消したりといった作業を行うための，何らかの特別な筆記用具が必要であったことが窺えよう．実際，インド式計算法においては，「算板」という，特別な道具が用いられた．

4. 算板という存在

算板とは，木の板などに，砂などをちりばめたもののことを指す．この砂を敷いた算板を用いることで，砂に数字をなぞって，数字を書き記すことが容易に可能となり，砂をならすことで，その数字を消すことが容易に可能となった*5)．そして，この算板が，インド式計算法の計算遂行に，なくてはならないものであったことは，上に挙げた例における計算過程からも明らかだろう．

一方で，算板という存在が，インド式計算法の大きな特徴であったことは，それを受け継いだ中世イスラーム世界において，インド式計算法のことを「板計算」や「塵計算」とも呼んでいたことからも窺えよう．それだけ，算板という存在は，特徴的であり，画期的だったのだろう*6)．

実際，中世イスラーム世界におけるインド式計算法について書かれた作品では，算板の使用を暗黙のうちに前提しているものが多い．やはり，インド式計算法が中世イスラーム世界へと伝播した際，算板とともに伝播したことになる．

では，なぜ，それだけ算板が注目されたのかというと，インド式計算法の能力の高さが，算板による筆算という形態に，大きく依存していたからである．

そのことについて，ウクリーディスィー（950 年頃活躍）が，指算との対比で，インド式計算法は「答えを得るのにかかる時間が少なく，覚える量が少なく，—中略—他のことをしていても，立ち戻って，計算を完了することができる」と述べているのは興味深い*7)．すなわち，インド式計算法の強みは，位取りを採用し，手順を踏むことで計算ができるということだけではなく，そもそも，

*5)　インドにおける算板については，文献 2) 参照．
*6)　中世イスラーム世界における「板計算」や「塵計算」という呼び名については，文献 7) 参照．
*7)　ウクリーディスィーの発言のアラビア語原文は，文献 11) の 48 ページ，その英訳は文献 10) の 35 ページを参照．

算板上での筆算という形態にも，大いに依存していたことが分かる．そして，こういった算板に書き記した記号こそが，インド数字だった．

以上の考察を通じて，インド数字の位置づけが明らかとなった．すなわち，インド数字は，インド式計算法を遂行するために，位取りに基づいて，算板上に記される場面において，初めて意味を持ってくるものだったのではないだろうか．逆に，そういう場面を背景として持っていないのならば，インド数字が用いられる必要性は，あまりなかったのではないか．それだけ，インド式計算法とインド数字と算板とは，強固に結びついていた．

そして，この位置づけを踏まえることで，アブー・マアシャルが日数をインド数字で再表記した一節の真意が見えてくる．

先にも指摘しておいたとおり，日数を提示するのみならば，アブー・マアシャルは，わざわざインド数字で再提示する必要はなかったはずである．やはり，この日数が，インド式計算法の枠組みで用いられるものだったため，アブー・マアシャルは，インド数字で再提示したのだろう．より具体的にいうならば，この日数が，算板上に記される存在として認識されていたことになる．すなわち，この書き換えは，天文学に伴う巨大な数値を計算する際，アブー・マアシャルがインド式計算法を選択したことを，示唆しているのではないだろうか．

しかしながら，では，なぜ，アブー・マアシャルは，天文計算において，インド式計算法を採用するに至ったのだろうか．その背景を探るためには，インド式計算法と天文学の関係を考察する必要があるだろう．

そこで，その関係を見てみるならば，インドにおけるインド式計算法の位置づけが，その背景にあることに気づく．

5. インド式計算法と天文学の関係

実は，インドにおいて，インド式計算法に特化した作品は，あまり存在しない．むしろ，インド式計算法が登場するのは，ほとんどの場合，インドの天文学書の「計算の章」においてだった．

逆に，この章立てから，インドにおいて，天文学の問題を解く際に，インド式計算法が必要不可欠だったことが窺える．すなわち，インドにおいて，インド式計算法が，天文学の基礎として存在していたことになる*8)．

一方，このインドにおけるインド式計算法の位置づけから，中世イスラーム世界へのインド式計算法の伝播に際して，インドの天文学が大きな役割を果たしたと推測できるのではないだろうか．実際，中世イスラーム世界において，クーシュヤールといったインド式計算法について著作を残した学者のほぼ全員が，むしろ天文学を主に司っていたという事実も，それを示唆する．

さらに，こういった，インド式計算法とインドの天文学との関係については，様々な学者の証言からも，窺うことができる．

例えば，シリア人学者ニスィビスのセヴェロス (666/7 年没) は，インドの学問に言及した際，まず，インドの天文学の精緻さを称えてから，インド式計算法とインド数字の精緻さを称えている*9)．また，文筆家ジャーヒズ (868 年没) も，「白人に対する黒人の優越性」という論考においてインドの文化に言及した際，インド人が天文学と数学に秀でており，とりわけインド人がインド数字を持っていることを称えている*10)．

これらの証言から，当時，インドの天文学とインド式計算法とインド数字の三者が，一括りのものとして捉えられていたことが窺えよう．すなわち，インドの天文学とインド式計算法とインド数字の三者が，深い関連のあるものとしてみなされていたことが分かるだろう．

では，なぜ，インド式計算法が天文学の文脈で注目されたのかというと，インド式計算法が，大き

*8) インド天文学書における「計算の章」については，文献 5) に，その具体的な章立てが紹介されている．

*9) ニスィビスのセヴェロスの実際の議論のシリア語原文と仏訳は，文献 8) の 225～227 ページを参照．また，文献 3) の 97 ページも参照．

*10) このジャーヒズの論考の部分訳は，文献 9) の 195～198 ページにある．また，文献 3) の 97 ページも参照．

な数を扱う際に，抜群の能力を発揮したからだろう．実際，先に触れたウクリーディスィーも，同じ箇所で，「手〔＝指算〕では不可能な大きな数を扱うには」インド式計算法が必要だと述べている．また，ジャーヒズも，先の発言に付け加えて，インド数字ならば，巨大な数値も簡単に表現できるだろうという見方を提示している．

やはり，筆算という形態は，驚きだったのだろう．そして，こういった流れを踏まえるならば，アブー・マアシャルが，天文学にまつわる巨大な数値を取り扱う際に，インド式計算法を選択したことも，大いにあり得ることだったといえる．

以上の考察から，インド式計算法が，中世イスラーム世界において，まず，インドの天文学と共に注目され，広まっていったと考えて間違いない．すなわち，インド式計算法は，まず，その能力の高さが天文学の文脈で注目されることで導入が進行し，広まっていったのではないだろうか．

6. 最後に

そもそも，本稿は，0について考察することを予定していた．しかしながら，インド数字を巡る考察に始終してしまった感があるかもしれない．

とはいえ，0は，もちろんインド数字の一つである．すなわち，位取り記数法を採用するからこそ，位取りの空欄が生じることになり，0を補填する必要が出てきたのである．0がインド数字の重要な一員として，インド式計算法を遂行するために必要不可欠な存在であったことは疑い得ないだろう．

一方，インド式計算法は，まず，天文学の文脈で，その能力に注目が集まり，中世イスラーム世界で広まっていった．すなわち，天文学において膨大な計算を処理する必要性から，算板上に位取りに従ってインド数字を書くという，筆算という形態をもったインド式計算法が，中世イスラーム世界において優位を占めるようになっていった．

そして，こういったインド式計算法の普及とともに，我々は0を記すようになったのだった．やはり，0を記す背景には，筆算の遂行があったのである．

我々は，筆算するために，0を「記し」始め，「記し」続けてきたのではないだろうか．

参考文献

1) Burnett, C. and Yamamoto, K. ed. and tr., *Abū Ma'šar: On Historical Astrology: The Book of Religions and Dynasties,* **2** vols, Leiden, 2000.
2) Datta, B., "The Science of Calculation by the Board," *American Mathematical Monthly* **35**, pp.520–529.
3) Datta, B. and Singh, A.N., *History of Hindu mathematics,* **2** vols, Dehli, 2001.
4) Levey, M. and Petruck, M. tr., *Kushyār ibn Labbān: Principle of Hindu Reckoning,* Madison and Milwaukee, 1965.
5) 林隆夫，『インドの数学』，中公新書．
6) 林隆夫，「インド中世の国庫の算術—「マーナサウッラーサ」2.2.95–125」，『同志社大学理工学研究報告』，第 **29** 巻第 1 号，38～56 ページ．
7) Kunitzsch, P., "The Transmission of Hindu-Arabic Numerals Reconsidered," in Sabra, A. and Hogendijk, P. ed., *The Enterprise of Science Islam: New Perspectives,* Cambridge, Mass., 2003, pp.3–21.
8) Nau, M.F., "Notes d'Astronomie Syrienne," *Journal Asiatique* **10**, **16**, pp.209–228.
9) Pellat, C., *The Life and Works of Jāḥiẓ,* Berkley and Los Angels, 1969.
10) Saidan, A.S., *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī,* Dordrecht, 1978.
11) Saidan, A.S. ed., *Al-Fusūl fī al-Ḥisāb al-Hindī,* Halab, 1985.
12) 山本啓二，「初期アッバース期と歴史占星術—アブー・マアシャルの『宗教と王朝の書』について」，『オリエント』，**44**(2), 135～147 ページ．

（みむら・たろう，日本学術振興会特別研究員）

無限小の概念史

不可分者から無限小へ



髙橋　秀裕

1. はじめに

西欧において，17–18 世紀を通じて盛んに議論された数学的諸概念の中で，無限小は最も有益なものの一つであろう．17 世紀後半にほとんど時を同じくして，ニュートンとライプニッツが無限小を強力な数学的言語（記号代数解析的言語）の中に埋め込み，互いに独立に微分積分学（＝無限小解析）を構築したことは一般によく知られている．

17 世紀のはじめの 50 年に注目すると，微分積分学形成以前の一つの特徴的な時期をなしている．求積問題や求接線問題への関心が昂揚し，それらに関する様々な技法の研究が蓄積されていった．それらに共通的な特徴として，次の二つが挙げられる．

1. 幾何学的方法によるものである．
2. 不可分者あるいは無限小という無限に関する概念を含み，それらを方法的に使用することに積極的態度が現れている．

この時期に存在したこのような一つの数学を「無限小幾何学」と呼ぶ所以である．

近代の「無限小幾何学」はアルキメデスの求積理論から出発した．エウドクソス，アルキメデス以来のいわゆる「取尽し法」*1) を求積の一般的方法に積極的に転化しようとしたのである*2)．それと同時に，古代ギリシャ人が忌避した無限ないし無限小概念を数学的手法の根底に採り入れたことなど，そこには単なるギリシャ数学の復興とは言えない近代的な方法を打ち出そうとする意図がはっきりと見てとれる．

しかし一方で，不可分者や無限小という概念自体が論理的困難性をもっていたため，近代人が無限概念の数学への導入に積極的であればこそ，そのような新しい概念の基礎づけをめぐって熾烈な論争が繰り広げられることとなった．

本稿では，西欧における微分積分学形成以前の数学者たちの「無限小技法とその基礎づけ」*3) に関する研究蓄積に焦点を当てながら，不可分者がどのようにして無限小に変貌していくか，その事情を歴史的に素描してみよう．

2. 不可分者と求積の解析法

ヨハンネス・ケプラー（1571–1630）が『葡萄酒樽の新立体幾何学』(1615 年）の中で，与えられた立体を無限に多くの無限に小さい断片に分割し，それを寄せ集めて体積を求めたという話は有名であ

---

*1)　「取り尽す」(exhaurire）という語彙の数学的使用は，グレゴワール・ド・サンヴァンサン（1584–1667）に始まる．

*2)　「取尽し法」,「二重帰謬法」という特有の厳密論法は，無限あるいは極限に関する事柄を意識的に回避したものと考えられるが,「取尽し法」は,「古代人の方法」の名の下に論証法の模範とされた．近世に入ると証明の最後の二重帰謬法が省略され，これを方式化する例も見られる．

*3)　紙幅の制約から，本稿では微分積分学形成以前，しかも求積技法だけに限定する．

る．こうした素朴な無限論法を一般的原則として用い，彼は多くの回転体の体積を求めることができた．しかし，ガリレオ・ガリレイ（1564–1642）はケプラーとは対照的に不可分者の方法を用いた．彼は与えられた幾何学的対象は1次元だけ低い対象から作られると考えている．

「不可分者」(indivisibilia)*4)という概念を用いて，最初に体系的な理論を展開したのは，ガリレオの弟子の一人，ボナヴェントゥーラ・カヴァリエリ（1598–1647）であった．彼は大著『ある新しい方法で推進された，連続体の不可分者による幾何学』(1635年）で，不可分者の用法について詳述している．例えば，線が「究極的部分」に至るまで分割されると，それ〔不可分割的なもの〕はもはや線ではなく点であると彼は考えた．すなわち，線の不可分者は点であり，同様に，面の不可分者は線である，そして，「点の全体」が線を，「線の全体」が面をなすというわけである．こうした考え方は，今日まで「カヴァリエリの原理」として知られている，面積の定理を用いるための手段を提供した．しかし，すぐに気づくことであるが，「全体」(omnes）という語は，しばしば「和」(summa）の意味にもとられるから，この方法にも難題が待ち構えていた．幅のない線分をいくら集めても幅のある面が作られるだろうかといった困難である．実際，カヴァリエリは『幾何学演習6巻』(1647年）の中では慎重にも，平面図形はこの不可分者である平行線分の全体に比例し，立体はこれの不可分者である平行な平面の全体に比例するが，不可分者の全体そのものが図形の面積や体積をそのまま決定するのではないとした．平面図形Fの「線の全体」を $\mathcal{O}_F(l)$ で表すことにすると，二つの平面図形F, Gの対応する辺の比が一定ならば，

$$\mathcal{O}_F(l) : \mathcal{O}_G(l) = F : G$$

が成立するということである．こうしてカヴァリエリは，高次パラボラの下方の面積について

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

の成立を推論することができ，$n = 3, 4, \cdots, 9$ まで証明を与えている．

ガリレオの晩年の愛弟子エヴァンジェリスタ・トリチェッリ（1608–1647）はガリレオの運動学的考察とカヴァリエリの不可分者の方法を自己の創造力の源泉として，1641年頃からそれらを独自なものへと発展させている．古代ギリシャの古典的幾何学の深い素養を積み，当時「最高の幾何学者」(geometra sommo）の名をほしいままにしていたトリチェッリは，決して安直に不可分者を採用したわけではなかった．彼は不可分者の方法で得た結果を用心深く古典的方法で吟味している．だがやがて彼は，不可分者の方法の簡潔な証明，発見的威力，そして結果の正確さを身をもって知り，その方法の最も力強い促進者となったのである．次の彼の言葉は，そのことを明瞭に示している．

> それはともかく，真実は，この幾何学が並はずれた発明の力への近道を供給するということ，そして，それが簡潔で直接的で明確な論証によって，古代人たちの理論ではほとんど成し遂げられない多くの困難な定理を立証するということである．実際，この幾何学は聡明な数学者にとってはまさに王道であり，すばらしい発明の創造者カヴァリエリは，それを最初に発見したのであり，公共の利益のためにそれを最初に明らかにしたのだった*5)．

トリチェッリの最も注目すべき発見は，無限に長くのびた立体が有限の体積をもつという，当時としては驚異的な事実であった．現代的な記法を用いて，彼の手法を検討しよう．ACを x 軸，ABを y 軸とすると，彼は双曲線 $xy = k^2$ を，漸近線である y 軸の周りに $y = a$ から $y = \infty$ まで回転してつくった無限に長い立体EBDの体積と，高さ $\mathrm{CD} = a$，底面の半径 $\mathrm{AC} = \dfrac{k^2}{a}$ の円柱FEDCの体積の和は，双曲線の半横径 $\mathrm{AR} = \sqrt{2}k$ を底

*4) ラテン語 indivisibilia には従来，不可分量（ども）という訳語もあるが，indivisibilia として点を考えた場合，点は量であるかという異議が必然的に生じる．

*5) Torricelli (1919–1944)[3], I-1, p. 140. cf. Malet (1997), p. 71.

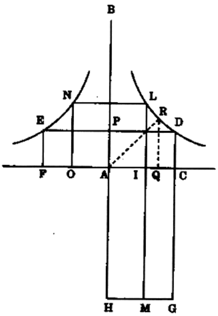


図 1　トリチェッリの無限の双曲型立体.

面の半径とする，高さ $AC = \dfrac{k^2}{a}$ の円柱 ACGH の体積に等しいということを証明した（図 1）.

実際，線分 AC 上に任意の点 I をとり，無限に長い双曲回転体に内接する円柱面 ONLI と，円柱 ACGH の中に底面 AH に平行な円 IM を考えると，$2\pi x(k^2/x) = \pi(\sqrt{2}k)^2$ であるから，円柱 ONLI の側面積は，半径 AR の円，すなわち円柱 ACGH の不可分者である円 IM の面積に等しい．したがって，無限の高さをもつ立体 FEBDC は，円柱 ACGH を構成している円の一つ一つに対応する円柱面の全体からなると考えられるから，立体 FEBDC は円柱 ACGH に等しいということになる．このように，トリチェッリはその当時としては大胆にも曲線や曲面をも不可分者として導入し，多くの成果をあげたのである．

不可分者の方法への攻撃に対して，カヴァリエリとトリチェッリは，はじめはその方法の発見的威力を強調していた．興味深いことに，彼らは不可分者の方法を「代数」と，古代人が発見法として用い，隠蔽したに違いない「解析法」と同じであると見なした．カヴァリエリは線の集合体，すなわち線の寄せ集めを算術的な無理量になぞらえた．「私は，問題を解くために代数学者がしばしば用いたのと同様の技法（artificio）を使った．というのも，数の諸根がどんなに言葉で言い表せない不条理で未知なものであっても，それでもなお彼らはそれらを足したり，引いたり，掛けたり，割ったりする．そして彼らは，与えられた問題から求める結果をうまく見出したときには，十分に責任を果たしたと確信しているからである．したがって，連続体を測るために，それが線であろうが面であろうが，私が不可分者の寄せ集めを用いることは妥当である」*6)．またトリチェッリはこう述べている．「この不可分者の幾何学はどうみても新しい発明ではない．… 私が思うに，むしろ古代の幾何学者たちは，最も難しい諸定理を発見するためにこの方法を用いた．彼らはそれらを証明するのに，敢えて難しい道を選んだけれども，それは彼らの秘密の技法を隠蔽するためか，あるいは中傷する忌々しい人たちに批判される機会を全く与えないようにするためであった」*7)．

3. 無限小の数学的形成

トリチェッリは一方で，不可分者を無限小に変容させる防御線を張り始めた．彼はカヴァリエリの方法から生じたパラドックスに答えて，カヴァリエリ流の不可分者を修正することに取りかかったのである．例えば，二つの同心円を考え，大きいほうの円周のすべての点と中心を結ぶ．小さいほうの円周とそのすべての半径との交点によって決定される点の数は，大きいほうの円周にある点と同数であることは明らかである，とトリチェッリは言う．結局，彼は不可分者に異なる大きさを付与し，小さいほうの円周の点を大きいほうの円周のそれより小さいとした．そして，それらは直径の比と同じ割合になるに違いないと結論を下した．したがって彼は，円周上で占める不可分者はユークリッド流の点ではなく，「微小な弧」であると考えているわけである．トリチェッリの不可分者は明らかに「無限小」であった．それは，いわば旧式の不可分者と有限の幾何学的量の間の中間的位置を占めるまったく新しい概念であった．しかし表現上では，すでに古典的幾何学や哲学的伝統とともに慣れ親しみ，十分に定着していた「不

*6)　Cavalieri (1653)[1], b2 recto. cf. Malet, *ibit.*

*7)　Torricelli (1919–1944)[3], I-1, p. 140. cf. Malet, *ibit.*

可分者」という術語が，世紀を通じて使用されることになった*8)．

トリチェッリと並んで，ジル・ペルソンヌ・ド・ロベルヴァル（1602–1675）も無限小に基づくアイディアを導入した．彼の最も重要な著作の一つ『不可分者の論考』(1634年執筆，1693年公表）はその標題にもかかわらず，実際には「無限小」に関する論考であった．ロベルヴァルは，例えば，線は無限個の部分に分割可能であるが，「究極的部分」というものは存在せず，分割後の各部分は依然として線であると考えていた．無限小は分割可能であり，二等分することも数学的に意味をもつ．無限小はそれをもたらす「大きさ」(magnitude）と同種であり，特に無限小の面を寄せ集めることによって，もしそれらが有限個であれば依然無限小の面，それらが無限個ならば有限のより大きな面が得られる．結局，無限小は無限分割の過程から生じるのであり，仮に線分を無限分割していっても，その過程で点が生じることは決してあり得ない，と彼は考えているのである．彼は元々自分の方法を「無限者（infinita）の方法」とも呼び，『不可分者の論考』の至る所でそのことに言及している．だが1647年1月のトリチェッリ宛書簡を見ると，やはりロベルヴァルもすでにカヴァリエリの著作によって定着していた名称「不可分者」を使わざるを得ないと感じていたことがわかる．

ロベルヴァルとトリチェッリの影響を受けて，無限小幾何学を一つの完成へと導いたのはブレーズ・パスカル（1623–1662）であった．パスカルは，不可分者の方法にはそれが無限小として理解される限りにおいては何ら困難はないと強調した最初の一人であった．彼は，「不可分者の全体」という不明確な観念を，「無限小線分の総和」，「無限小面分の総和」など，総和（summa omunium）という数学的な概念にはっきりと移行させた．後期の研究『アモス・デトンヴィル氏から前国事院勅任参事官ド・カルカヴィ氏への手紙』*9)（1658年）の中で，彼は次のように述べている．

> 私は「縦線の和」という表現を用いることに何ら支障を感じないであろう．この表現は不可分者の理論を解しない人々には幾何学的でないと思われる．このような人々は無際限の個数の線によって一つの平面を表すなどということは幾何学に反するように思っているのであるが，これは彼らの無知の結果にほかならない．というのも，上の言葉の意味するものは各縦線と直径の相等しい小部分の各々とによって作られた無際限の個数の矩形の和にほかならないからである*10)．

彼は面を縦線の集合体として理解することはできなかったが，面が無限に多くの無限に小さい底辺の矩形から作られると見なすことで，何ら問題はないと考えた．こうしてパスカルにおいては，もちろんまだ極限概念が明確でないため，積分概念の完成とまでは言えないが，その先駆となる「無限小者の総和」の概念が確立したわけである．

パスカルは「四分円の正弦論」と題する小論で，四分円の任意の部分の下方の面積を見出している．「四分円ABCがあり，その半径ABを軸，これに垂直な半径ACを底と考える〔図2〕．弧BC上に任意の点Dをとり，Dから半径ACに正弦DIをおろす」*11)．そこで彼は接線DEを引いて，その上に任意の諸点Eをとり，そこから半径ACに垂

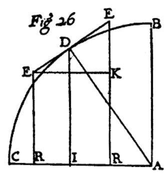


図2　パスカルの四分円．

*8)　無限小概念は17世紀中頃までには主流の数学思想の中に導入されたが，infinitesimalという語は17世紀のテキストにはほとんど見られない．ラテン語でindefinite parvae, infinite parvae，フランス語ではinfiniment petitsが普通であった．

*9)　アモス・デトンヴィルはパスカルの変名である．

*10)　Pascal (1904–1914)[5], VIII, p. 352–353〔邦訳，663頁〕．

*11)　18世紀に至るまで，角 φ の正弦（sine）は線であって，比ではなかった．現代的記法では，r を円の半径とすれば，それは $r\sin\varphi$ に相当する．

線ERを下ろし，命題1で，「四分円の任意の弧の正弦の和は，両端の正弦の間に含まれた底の部分に半径を掛けたものに等しい」と主張する．ここで，「正弦の和」とは接線EDEによって表されている無限小の弧を各正弦に掛けることによって作られる無限小の矩形の和を指す．したがって，現代的記法によれば，パスカルの命題は

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r\sin\varphi\, d(r\varphi) = r(r\cos\varphi_0 - r\cos\varphi_1) \tag{1}$$

に相当する．パスカルは直角三角形DIA, EKE（無限小）の相似性に基づき，AD : DI = EE : EK から DI × EE = AD × RR を導いている．二つの与えられた角 φ_0, φ_1 の間でこれらの矩形の総和をとれば，結果として式 (1) が得られる．ここでの核心は無限小三角形EKEが考えられていることである．後にライプニッツはパスカルのこの手法を受け継ぎ，より一般的な特性三角形（triangulum characteristicum）の発想を得るに至った．

4. ウォリスとバロウによる無限小

ジョン・ウォリス（1616–1703）は，無限小の使用を力強く唱道した数学者として知られる．彼は1651年にトリチェッリの『幾何学的著作』（1644年）を通してカヴァリエリの不可分者の方法を知り，『円錐曲線論』（1655年）と『無限算術』（1655年）を通じて，1656年頃から英国にいわば彼独自の「不可分者の方法」を普及させ始めた．彼は後者の序文で，カヴァリエリの不可分者の幾何学的方法を「無限の算術」として算術化する意図を表明している．彼は不可分者をカヴァリエリが理解したような点，線，面として理解すべきではないと強調した．むしろそれらは無限小に取って代わられる必要があると考えたのである．

しかしこの時期，ウォリスの代数解析的数学は，思想総体を背景にした熾烈な数学論争へと発展していた*12)．アイザック・バロウ（1630–1677）が，1644–66年に行ったルーカス数学教授就任講義（『数学講義』）で，ウォリスの数学を批判したのもその一つである．バロウはウォリスの記号数学の基礎づけでは，古典的幾何学と同程度の厳密性は保証されない，と批判したのである．

一方で，バロウは『数学講義』において，無限小の論理的基礎を探究している．彼の議論はパスカルのものに近かった．バロウによれば，不可分者（点，線，面）は完全に正当な数学的実体であるが，それは線，面，立体を構成することはあり得ない．彼は大きさの無限分割の可能性に賛成だったが，大きさが点から成るという仮定が導入されると，多くの幾何学的命題が不確実なものになると主張した．例えば，彼はトリチェッリの挙げた二つの同心円のパラドックスを援用して，円周は点によって構成されないことを示している．

続いて彼は，大きさが現実に無限個の無限小部分から成るというテーゼを擁護している．しかし，実際彼にとって重要だったことは，例えば，無限小の総和と面との差は任意の有限の大きさより小さいことを示すことであった．すなわち，その差はまさに無限小部分なのである．バロウの『幾何学講義』（1670年）に付録として付けられた証明がこのことを明瞭に示しているので見てみよう．

曲線ABが与えられ，その基線DBが点Zによって無際限に多くの等しい部分に分割されるとし，平行四辺形が外接図形ADBMXNXOXPXRAを作り，内接図形HXGXFXEXZDHが作られるとしよう．図3において，点Aは左から最初の点Xに一致するものとする．いま S を内接図形より大きく，外接図形より小さい面とする．バロウは S が曲線ABによって定義された面AXBDに等しいことを証明した．はじめに彼はAXBDが S より小さくはなり得ないことを示し，次に S より大きくなり得ないことを示した．まず，面AXBDが S より小さいと仮定しよう．そして，その差が矩形ADLK（有限の大きさ）に等しいとすると，ARは無際限に小さい（indefinite parva）線であり，したがってAKより短いから，矩形ADZRは矩形ADLKより小さい．しかし，矩形ADZRは，矩

*12) ホッブズ–ウォリス論争，さらには17世紀数学思想について理解を深めるには，佐々木（1992）[14]が有益である．

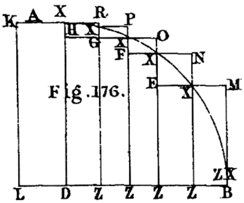


図 3　バロウによる曲線下の面積の証明.

形 AHXR, XPXG, XOXF, XNXE, XMBZ の和に等しいから，三線形 AXR, XXP, XXO, XXN, XBM の全体より大きい．ゆえに，面 AXBD + 矩形 ADZR は外接図形より大きい．S は面 AXBD + 矩形 ADLK に等しいから，結果として，外接図形より大きくなり，仮定に矛盾する．よって，AXBD は S より小さくはなり得ないということになる．同様の議論によって，バロウは AXBD が S より大きくはなり得ないことを証明し，したがって AXBD が S に等しいと結論を下した．

ここで，バロウは証明に二重帰謬法を用いている．トリチェッリを想起させるが，バロウにとって重要だったことは，無限小の矩形の和が曲線によって囲まれた領域を正確にもたらすことを示すことだった．一般的に，バロウのように，古代ギリシャの幾何学的技法に精通し，経験主義的傾向をもった数学者は，一方では代数解析をその容易さと効果的発見のために受け入れ，他方で厳密な証明では古典的な総合的証明法に依存したのである．

5. おわりに

17 世紀の数学者は不可分者を無限小と分かつ差異を十分に知っていた．実際，彼らはこの差異について注意深く議論し，不可分者が捨てられ，無限小がその代わりに採用されたとしても，不可分者の方法の妥当性のことで心配する理由はないと考えた．むしろ，彼らはそうすることで，不可分者の方法に正当な地位を与えようとした．こうして 17 世紀中葉までに，無限小幾何学は技法的にはすぐにでも「無限小解析」に変貌可能なまでに成熟していった．しかし，当時における「無限小」とは，0 に等しいような，等しくないような，曖昧なものであった[*13)]．微分積分学成立後の 17 世紀末から 18 世紀になっても，無限小の基礎づけに関する論争は繰り広げられたのである[*14)]．

*13)　ジョージ・バークリは「死滅せる量の亡霊」と表現した．

*14)　当然のごとく，ニュートン，ライプニッツ，また彼らの周辺の数学者たちにとって，無限小をどのように基礎づけるかということは，懸案事であるとともに重要な問題であった．

参考文献

1) Cavalieri, Bonaventura. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiae, 1635; $_2$1653).

2) *Idem. Exercitationes geometricae sex* (Bologna, 1647).

3) *Opere di Evangelista Torricelli*, edite da G. Loria e G. Vassura, **4** vols. (Faenza, 1919–1944).

4) *Divers Ouvrages de M. Personier de Roberval* in *Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique, par Messieurs de l'Académie Royals des Sciences* (Paris, 1693), pp. 69–302.

5) *OEuvres de Blaise Pascal*, par L. Brunschvicg et P. Boutroux, **14** vols. (Paris: Hachtee, 1904–1914; repr., 1976–1978).

6) Barrow, Isaac. *The Mathematical Works*, ed. by W. Whewell (Cambridge, 1860; repr., 1973).

7) *Idem. Lectiones geometricae* (Londini, 1670; repr., 1976).

8) Malet, Antoni. *From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities* (Bellaterra, 1996).

9) *Idem.* "Barrow, Wallis, and the Remarking of Seventeenth Century Indivisibles," *Centaurus*, **39** (1997), pp. 67–92.

10) パスカル，ブレーズ「数学論文集」原亨吉訳，『パスカル全集』第 **1** 巻（人文書院，1959）所収，577–673 頁.

11) カッツ，ヴィクター J.『カッツ 数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳（共立出版，2005）.

12) 原亨吉「近世の数学—無限概念をめぐって」，『数学史』（筑摩書房，1975）所収，119–372 頁.

13) 中村幸四郎『近世数学の歴史—微積分学の形成をめぐって』（日本評論社，1980）.

14) 佐々木力『近代学問理念の誕生』（岩波書店，1992）.

15) 近藤洋逸「微積分学の形成—トリッチェルリの業績」，佐々木力編『近藤洋逸著作集』第 5 巻（日本評論社，1994）所収，278–323 頁.

16) 髙橋秀裕『ニュートン—流率法の変容』（東京大学出版会，2003）.

（たかはし・しゅうゆう，埼玉県立熊谷女子高等学校）

解析学における0



小谷 元子

1. 微分積分学と収束

古代ギリシアにおける幾何，インド・アラビアにおける代数に匹敵するヨーロッパ文明がもたらした数学における最大の功績は，解析学，特にその誕生を促した「運動の理論」であろう．ケプラー（1571–1630）による惑星の運動，ガリレイ（1564–1642）の自由落下の研究を受けた，ニュートン（1642–1727）とライプニッツ（1646–1716）による微積分学，中でも基本定理の発見は近代科学の基礎となっている．もちろん古代ギリシア時代に，すでに面積や体積を求める必要から，極限や積分の概念の萌芽は存在した[2]．しかし，希有の天才*1)が個別の問題ごとに才能を発揮せずとも，誰にでも扱える演算として極限が扱えるようになるにはニュートン，ライプニッツまで待たねばならなかったのである*2)．さらに，関数の概念の確立や連続性の厳密な定義については，19世紀までの300年を必要とした．

現在では関数の連続性は悪名高き ϵ–δ を使って明確に定義され，理系の大学生は1年生で習う*3)．

実数値関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が開区間 I で定義され，$a \in I$ とする．

定義 1 $^\forall\epsilon > 0$ に対して $^\exists\delta > 0$ が存在して

$$|f(x) - f(a)| \le \epsilon, \quad (^\forall x : |x - a| < \delta)$$

が成立するとき f が $x = a$ で**連続**であるという．

任意の $\epsilon > 0$ といいながら，実際は「どんなに小さな正の数 ϵ に対しても」であり，更に気持ちは $\epsilon \to 0$ であるということを十分に説明しなければ，これが「連続」であるというイメージは湧きにくい．

ϵ–δ を使わず，数列の収束を用いる方法もある．

定義 2 a に収束する任意の数列 $x_n \to a$ に対して数列 $\{f(x_n)\}$ が収束して，極限値が $f(a)$ に一致するとき f が $x = a$ で**連続**であるという．

こちらのほうが「連続」のイメージを抱きやすいだろうか．

微分は，平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$ の $h \to 0$ での極限で定義される．微分積分の記号（$\frac{dy}{dx}$, $\int f(x)dx$）はライプニッツによるもので，これが優れた記法であったことが，微分積分学の発展に大きな意味があったのは有名な話である．

2. 差分化：連続から離散へ，近似理論

微分が平均変化率（差分の比）の極限として定

*1) エウドクソス，アルキメデスなど．

*2) 数学史的には大雑把にすぎよう．アルキメデスは接線を知っていたし，最小作用の原理で光の軌跡を記述したフェルマ（1601–1665）は微積分学の先駆者であるなど，挙げるべき人名は多数ある．

*3) 最近は ϵ–δ を教えない場合が多く，それはそれで演算のみを習得するにはいいが，話が曖昧になって，逆に分かりにくいと感じる学生もいるだろう．

義されるのであれば，面倒な収束の議論を後回しにして，極限を取る直前の形のまま方程式を扱っておいて，最後に収束（もしくは近似の良さ）を扱おうというのが，差分の考え方である．微分作用素は（2 乗可積分関数のなす関数空間では）非有界で扱いにくいが，差分作用素は有界である，代数的方程式を解けばよいなど，解析的な難しさは（当面は）ワンランク下がる．しかし，同時に差分化したことから生じる新たな困難もある[5]．

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を**前進差分**，

$$D_h^c f(x) := \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

を**中心差分**と呼ぶ．Taylor 展開

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

を用いると，後者がより良い近似を与えていることが分かる．高次の近似が必要な度合いに応じて，選択する．

2 階導関数については

$$D_h^2 f(x) := \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

とすれば良い．

有限区間上の熱方程式 $u:\mathbb{R}_+\times[0,1]\to\mathbb{R}$：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t,0)=u(t,1)=0, \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \qquad \text{(熱方程式)}$$

を，時間の単位ユニットを τ，空間の単位ユニットを h とし，$t=n\tau, x=kh$ に対して $\lambda=\tau/h^2$ と置くと，差分化方程式は，

$$\begin{aligned} &v(n+1,k)-v(n,k) \\ &= \frac{\lambda}{2}(v(n,k+1)-2v(n,k)+v(n,k-1)) \end{aligned} \qquad (1)$$

となる．λ を固定して，h をゼロに近付けたとき，$\lambda\le 1$ のときは良い近似解を与えるが，$\lambda>1$ では，うまく行かない．これは Courant–Friedrichs–Lewy の条件として知られている．実際，$v(n,k)=\sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l(n)\sin(\pi lhk)$ の形の解は

$$b_l(n) = b_l(0)(1-2\lambda\sin^2(\pi lh/2))^n$$

であることからも想像できるように，$\lambda>1$ のときは離散解は安定でない．空間—時間のユニットを $\tau \fallingdotseq h^2$ で，小さくしていくことを**放物型スケーリング**という．

往々にして線形問題では差分は良い近似を与えるが，非線形問題ではそうとは限らない[12]．

3. ランダムウォークの極限定理：離散から連続へ

$\mathbb{Z}$ 上を，右に行く確率 1/2，左に行く確率 1/2 という法則に従う標準的なランダムウォーク $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．推移作用素 $Lf(k)=\frac{1}{2}f(k+1)+\frac{1}{2}f(k-1)$ を使うと，初期分布 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ の時刻 n での分布は $v(n,k)=(L^n f)(k)$ で与えられる．

$$\begin{aligned} v(n+1,k) &= (Lv(n,\cdot))(k) \\ &= \frac{1}{2}v(n,k+1)+\frac{1}{2}v(n,k-1) \end{aligned}$$

なので，$v(n,k)$ は $\lambda=1$ の差分熱方程式

$$\begin{aligned} &v(n+1,k)-v(n,k) \\ &= \frac{1}{2}(v(n,k+1)-2v(n,k)+v(n,k-1)) \end{aligned}$$

の解である．ランダムウォークの古典的な極限定理である中心極限定理の主張は，「$\mathbb{Z}$ 上の標準的なランダムウォークは，長時間で $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動に収束する」である．ランダムウォークは熱方程式の離散化方程式の解であり，熱方程式の基本解 $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})$ がブラウン運動の分布である，

$$P(a<X_t<b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dt$$

であることを思い出そう．これは，差分方程式の解が放物的スケーリング $(t,x)\mapsto(\lambda h^2 t, hx)$ によって，$h\to 0$ で熱方程式の解に収束すること

の表現に他ならない．しかし，大切なのは，ここで予め与えられているのは離散方程式（ランダムウォーク）であり，離散モデルの極限として連続モデルが捕まるのであって，連続モデル（ブラウン運動）の離散化としてランダムウォークがあるのではないということである．もっと一般の離散空間上のランダムウォークに対して中心極限定理を考えるとき，極限の連続モデルが何であるかは面白い問題である．数直線上に並んだ整数 $\mathbb{Z}$ の隣との幅をどんどん小さくしていけば，数直線 $\mathbb{R}$ に「収束」するのはいいとして，もっと一般の周期的図形（結晶格子），例えば三角格子や六角格子の場合に，ランダムウォークの中心極限定理の極限として現れる連続モデルは何なのか？ 実は，これは結晶格子のもっとも美しい実現に関係する[7]．さらに非可換な周期性を持つ冪零被覆グラフの場合の中心極限定理（石渡氏の結果[4]）では，冪零リー群上の劣ラプラシアンによる熱解が現れるなど，非自明な連続空間を極限として捉えることができる[6]．この極限空間は，第5節で述べる「距離空間の無限遠での漸近錐」と密接に関わっている．

4. 超準解析

$1 = 0.999\cdots$ は多くの人に受け入れがたい印象を与える等式であるらしい．高校で習った等比数列の和と極限の知識を使えば

$$
\begin{aligned}
0.999\cdots &= 9 \times (0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots) \\
&= 9 \times (0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \cdots) \\
&= \lim_{n\to\infty} 9 \times 0.1 \times \frac{1-(0.1)^n}{1-0.1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

と明快に説明できるにも関わらず．実数の小数表示が $1 = 0.999\cdots$ に起因する場合のみを例外として一意的であり，1つの数が2通りに書けることになじみがないことが原因の一つであろう[10]．しかし，抵抗がある最大の理由は，やはり，我々が「連続」の概念を感覚的には理解できないことにある．実際，実数の連続性がデデキント（1831–1916）によって確立されたのは19世紀である．人間は個々が別々の個体であり，離散的な存在である．連続的にどんどん小さくなっていけば，最後にゼロになるということが，頭では理解できても感覚のレベルでは受容できない．$0.999\cdots 9$ は1よりほんの少し小さい．9がたくさん並べば並ぶほどその差は小さくなり，最後にゼロに収束して一致する．「でもやっぱり差の名残のようなものはないの？」というのが，個体である人間の正直な感想ではないか．

思いきって，「すべての正の実数より小さい数」を数学的実在として認めてしまおうというのが**超準解析**である．元々のライプニッツの微分積分は，「無限小元」を仮定したもので，それが，第1節のように実数の世界で定式化されたのが従来の解析学であり，論理学を用いた新たな数の体系を作る方向が超準解析である．1960年代にA. ロビンソンによって基礎理論が作られた[8]．

アイデアは，実数を有理数列（コーシー列）の同値類（＝数列の極限値）で構成したように，実数列に対して同値関係を導入し，その同値類を $\mathbb{R}$ の拡大 $^*\mathbb{R}$ と定義する．きちんと定式化するには，非単項超フィルターを用いる．

$\mathbb{N}$ の部分集合の空でない族 $\mathfrak{F}$ が

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,
2. $A \in \mathfrak{F}, A \subset B \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$,
3. $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$

を満たすとき，$\mathbb{N}$ 上の**フィルター**といい，包含関係に関して極大なとき**超フィルター**という．有限集合を含むフィルターは，同値関係を定めるには，好ましくないので，有限集合を含まない超フィルターを考える．このようなフィルターを**非単項超フィルター**という．

例 1 （フレッシェ・フィルター）

$$\mathfrak{F}_0 = \{A \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ は有限集合 }\}$$

はフィルターである．これを含む超フィルターが選択公理により存在する．これは非単項超フィルターである．

事実1 $\mathfrak{F}$ が非単項超フィルターならば，$\mathbb{N}$ の有限分割 $\mathbb{N} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_l$ に対して，必ず唯一つの $A_i \in \mathfrak{F}$ が存在する．

実数列全体の集合 $\mathrm{Seq} := \{\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ の同値関係 $\alpha = \{a_n\} \sim \beta = \{b_n\}$ を $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathfrak{F}$ で定め，商集合 $\mathrm{Seq}/\sim_{\mathfrak{F}}$ を ${}^*\mathbb{R}$ と書く．実数 a は定数列 $a_n = a$ の同値類と同一視することで，$\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ である．${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ の元を超実数という．また，${}^*\mathbb{R}$ の順序 $\alpha \leq \beta$ を $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathfrak{F}$ で定める．${}^*\mathbb{R}$ は非アルキメデス全順序体である．すべての $M \in \mathbb{R}$ に対して $x > M$ となる $x \in {}^*\mathbb{R}$ を正の**無限大数** (負の無限大数も同様に定義)，すべての正の実数 $e > 0$ に対して $-e < x < e$ となる $x \in {}^*\mathbb{R}$ を**無限小数**という．数列 $a_n = n$ は無限大数，数列 $a_n = 1/n$ はゼロでない無限小数を与える．2つの超実数 α, β の差 $\alpha - \beta$ が無限小のとき $\alpha \fallingdotseq \beta$ と記し，$a \in \mathbb{R}$ に対して a の無限小近傍 $\mu(a) = \{\alpha \in {}^*\mathbb{R} \mid \alpha \fallingdotseq a\}$ と置くと，$\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ が無限大でないとき，必ず唯一つの実数 a が存在して $\alpha \in \mu(a)$ となる．この a を α の標準部分といい，$\mathrm{st}(\alpha)$ と書く．自然数上，または実数上定義された実数値関数 f は $\alpha = \{a_n\}$ に対して ${}^*f(\alpha) = \{f(a_n)\}$ と定めることで ${}^*\mathbb{N}$ または ${}^*\mathbb{R}$ 上の関数へ拡張できる．極限 $\lim_{\mathfrak{F}}$ は無限小近傍を用いて自然に定義される．

連続関数は

$$x \fallingdotseq x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \fallingdotseq {}^*f(x_0)$$

と表現できるし，$f(x)$ が $x = a$ で微分可能とは有限超実数 c が存在して ${}^\forall x \in \mu(a)$ に対して，

$$\frac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a} \fallingdotseq c, \quad (x \neq a)$$

が成立することであり，このとき

$$f'(a) = \mathrm{st}\left(\frac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

と定義する．同様にして，${}^*\mathbb{R}$ 上の解析学が構築できる．Loeb 測度とアンダーソンのランダムウォークに対して，中心極限定理は初等的に証明できるらしいが，このことについて私はあまりよく知らない[1]．

5. 距離空間の収束理論

ここまで，数列の収束を通じてゼロを見てきたが，最後に，超準解析のアイデアを使ったグロモフによる距離空間の列の収束の概念を紹介する．

(X_n, d_n, o_n) を基点 $o_n \in X_n$ 付き距離空間の列とする．前節に倣って，$\mathrm{Seq} = \{\{x_n\} \mid x_n \in X_n\}$ とおき，また，非単項超フィルター $\mathfrak{F}$ を用いて，同値関係を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \Leftrightarrow \quad \lim{}_{\mathfrak{F}} d_n(x_n, y_n) = 0$$

で与える．極限距離空間を $X_\infty = \mathrm{Seq}/\sim$ に極限距離を $d_\infty(\{x_n\}, \{y_n\}) := \lim_{\mathfrak{F}} d_n(x_n, y_n)$ で与えた距離空間と定義する．一般には，極限空間は連結とは限らないので，基点 $o_\infty = \{o_n\} \in X_\infty$ から有限距離の点の集合

$$X_\infty^0 = \{x \in X_\infty \mid d_\infty(x, o_\infty) < \infty\}$$

を考え，$(X_\infty^0, d_\infty, o_\infty)$ を**基点付き極限空間**という．一般には極限空間はフィルター $\mathfrak{F}$ の取り方に依存するので，必要に応じて $\mathfrak{F}$ を明記する．定空間列 $(X_n, d_n, o_n) = (X, d, o)$ の場合は，$(X_\infty, d_\infty, o_\infty) = (X, d, o)$ であるし，また以下のように，これは，距離空間列の収束理論では最も一般的なグロモフ・ハウスドルフ位相の拡張概念になっている．

事実2 コンパクト距離空間列がグロモフ・ハウスドルフ位相でコンパクト距離空間 X に収束する場合には，フィルターの取り方によらず，$X_\infty = X$ となる．

特に $(X_n, d_n, o_n) = (X, \frac{1}{n}d, o)$ のときの X_∞ を距離空間 (X, d) の**無限遠での漸近錐**という[*4]．$\mathbb{Z}$ の標準的な距離構造に対して，$\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{R}$ であるし，結晶格子の漸近錐は d–次元ベクトル空間に，ユークリッド距離と異なる距離が入る．この距離球は，結晶格子の大偏差にも現れる興味深い多面体になる．有限生成冪零群の漸近錐は冪零リー群

*4) 更に，精密な議論が必要な場合には，スケールの取り方を $\frac{1}{n}d$ ではなく $\epsilon_n \downarrow 0$ を用いて $\epsilon_n d$ とする場合もある．

である．これらの例では超フィルターを用いる必要はなく，普通のグロモフ・ハウスドルフ収束で漸近錐を捕まえることができる．負極率空間の漸近錐を見るには，超フィルターによる収束の概念が必要になる．距離空間を ϵ 倍にスケール変換すると「曲率」は ϵ^{-2} 倍になるので，負曲率空間の漸近錐は曲率 $-\infty$ の空間になりそうである．実際，X が非初等的双曲群のとき，X_∞ はフィルター $\mathfrak{F}$，基点の取り方によらず一意的に決まり，それは完備等質 $\mathbb{R}$–樹木（tree）になることが知られている[3]．群の研究では，群 Γ が空間 X にどのように作用するかを見るために，空間 X の無限遠境界を考え，そこへ誘導される Γ の作用を見ることが有効である場合が多いが，この超準解析を用いた無限遠での漸近錐も，単なる抽象論ではなく，幾何的群論に大いに役立っている．

参考文献

1) S. Albeverio; R. Høegh-Krohn; J.E. Fenstad; T. Lindstrøm, "Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Pure and Applied Mathematics", **122**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
2) エビングハウス他，『数』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2004.
3) M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, "Geometric group theory", Vol.**2**, 1–295, Eds G.A. Nible and M.A. Roller, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
4) S. Ishiwata, "*A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth*", *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), no.3, 837–853.
5) 金子晃，『偏微分方程式入門』，東京大学出版会，1998.
6) 小谷元子，『グラフの幾何学』，数理科学第 **39** 巻 2 号，特集「微分幾何の新世紀」，(2001).
7) M. Kotani and T. Sunada, "*Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel*", *Comm. Math. Phys.* **209** (2000), 633–670.
8) A. Robinson, "Non-standard anakysis", North Holland, 1966.
9) 斎藤正彦，『超積と超準解析』，東京図書，1976.
10) 杉浦光夫，『解析入門』，東京大学出版会，1980.
11) 高木貞治，『解析概論』，岩波書店，1980.
12) 山口昌哉編著，『数値解析と非線形現象』，日本評論社，1996.

（こたに・もとこ，東北大学大学院理学研究科）

微分方程式論における自明解

坂口 茂

1. はじめに

独立変数を $t \in \mathbb{R}$, 未知関数を $u = u(t)$ とする常微分方程式

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in \mathbb{R}$$

を考える．もし，2 変数 t, u の関数 $f(t,u)$ が $f(t,0) \equiv 0$ を満たせば，$u(t) \equiv 0$ はこの常微分方程式の自明な解，つまり自明解である．もし，さらに $f(t,u)$ が連続関数で特に変数 u について Lipschitz の条件

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le L|u-v|, \quad (L \text{ は正定数})$$

を満たせば，初期値問題の一意性定理より，ある点 $t = t_0$ で初期条件 $u(t_0) = 0$ を満たす解は自明解 $u(t) \equiv 0$ に限る（t_0 を関数 $u(t)$ の零点という）．つまり，このような $f(t,u)$ について，自明解は零点を持つ解として特徴付けられる．

複素関数論において，定数関数は複素平面全体上の自明な正則関数であるが，この特徴付けとして，Liouville の定理「複素平面全体上正則で有界な関数は定数関数に限る」がある．この定理は N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 2)$ 上の実調和関数に一般化される．つまり，独立変数を $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, 未知関数を $u = u(x)$ とする Laplace の方程式

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

を考える．ここで $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ は Laplace 作用素であり，$\Delta u = 0$ を満たす関数は実調和関数と呼ばれる．定数関数は自明な実調和関数である．実調和関数に関する Liouville の定理は「$\mathbb{R}^N$ 全体上の実調和関数で上に有界な関数は定数関数に限る」と書ける．つまり，定数関数は $\mathbb{R}^N$ 全体上の Laplace の方程式の上に有界な解として特徴付けられる．証明は例えば次のようになされる．$u = u(x)$ を $\mathbb{R}^N$ 全体上の上に有界な実調和関数とする．上に有界であるから，ある定数 M が存在して

$$u(x) \le M,\ x \in \mathbb{R}^N$$

が成り立つ．そこで，$v(x) = M - u(x)$ とおくと，$v = v(x)$ は $\mathbb{R}^N$ 全体上の非負な実調和関数である．Poisson の積分表示と調和関数の平均値の定理から得られる次の Harnack の不等式を v は満たす（文献 8), p.29 または文献 18), p.172 を参照）．

$$\frac{R^{N-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{N-1}} v(0) \le v(x) \le \frac{R^{N-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{N-1}} v(0), \quad |x| < R.$$

ここで $|x|$ は x の Euclid ノルムを表す．$R \to \infty$ の極限をとれば $v(x) = v(0)$ が得られる（非線形楕円型方程式に対する Liouville の定理の最近の進展について，文献 23) を参照．また，粘性 Burgers 方程式に対する Liouville の定理を扱った文献

13) も興味深い).

このように，微分方程式論において，自明解や容易に予想される解の特徴付けの問題が古くから研究されている．著者が今までに興味をもったこの種の問題のいくつかを以下の節で紹介しよう．

2. 曲面論からの問題

独立変数を $x \in \mathbb{R}^N$, 未知関数を $u = u(x)$ とする方程式

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

を考える．ここで $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ であり，$|\nabla u|$ は ∇u の Euclid ノルム，div は発散を表す．この方程式の解 u のグラフ $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x \in \mathbb{R}^N\}$ は $\mathbb{R}^{N+1}$ 内の極小超曲面（平均曲率が零である超曲面）を表す（文献 8, 9) を参照).
x の 1 次関数 $u(x) = a \cdot x + b$, $(a \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R})$ は自明解である．ここで $a \cdot x$ は $\mathbb{R}^N$ の内積を表す．もちろん，1 次関数のグラフは超平面を表している．$\mathbb{R}^N$ 全体上の解 u は 1 次関数に限るかという Bernstein の問題があって，$N \leq 7$ のときは肯定的に解決され，$N \geq 8$ のときは 1 次関数でない解の存在が示されている（文献 9), Chapter 17 に詳しい解説がある).

「シャボン玉は丸い」という次の Aleksandrov の定理（文献 1), p.412 ）は有名である．

定理 1 (Aleksandrov)　**$N \geq 3$ とする．$\Phi = \Phi(\kappa_1, \cdots, \kappa_{N-1})$ を $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_{N-1}$ に対して定義された C^1 級関数とし，$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_i} > 0$ $(i = 1, \cdots, N-1)$ を満たすと仮定する．もし $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれた C^2 級の閉超曲面 S について，S の主曲率 $\kappa_1, \cdots, \kappa_{N-1}$ の関数 Φ が S 上一定ならば，S は球面に限る．**

局所座標を用いて曲面 S をある関数 u のグラフとして局所的に表現するとき，$\Phi(\kappa_1, \cdots, \kappa_{N-1})$ が S 上一定であるという式は，条件 $\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_i} > 0$ より，関数 u が $(N-1)$ 個の独立変数に関する 2 階の楕円型方程式を満たすことに変換される．特に球面はすべての主曲率が一定であるから，関数 Φ が S 上一定という仮定を満たしている．つまり，球面はこの "方程式" の自明解である．Aleksandrov の定理の証明は *Aleksandrov's reflection principle* または *the method of moving planes* と呼ばれ，それは 2 階楕円型方程式の最大値の原理に基づいている．

Aleksandrov's reflection principle について説明しよう．閉超曲面 S で囲まれた $\mathbb{R}^N$ の有界領域を Ω とする．任意の方向 $a \in \mathbb{R}^N$ $(|a| = 1)$ と方向ベクトルを a にもつ直線 $l : x = ta\ (t \in \mathbb{R})$ を考える．点 ta を含み直線 l に垂直な平面を $P(t)$ とする．$t \fallingdotseq -\infty$ から t を増加し $P(t)$ が $S = \partial\Omega$ と初めて出会う平面を $P(t_0)$ とする．$t_0 < t$ で $t - t_0$ が十分小さければ，$P(t)$ によって Ω は分割され，Ω の $P(t)$ の a 方向手前の部分を $\Omega(t)$ とすると，$\Omega(t)$ を $P(t)$ について対称に折り返してできる領域 $\Omega^*(t)$ について $\Omega^*(t) \subset \Omega$ が成り立つ．この条件を満たしながら t を増加させて行くと，ある $t = T$ が存在し，次の 2 つの場合のどちらか一方が成り立つ．

(I)　点 $Q \in \partial\Omega \cap \partial\Omega^*(T) \cap P(T)$ で 2 つの曲面 $\partial\Omega$ と $\partial\Omega^*(T)$ が接する．

(II)　点 $Q \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega^*(T)) \setminus P(T)$ で 2 つの曲面 $\partial\Omega$ と $\partial\Omega^*(T)$ が接する．

どちらの場合でも点 Q の近くで 2 つの曲面 $\partial\Omega$ と $\partial\Omega^*(T)$ は局所的にそれぞれ $(N-1)$ 変数関数 u, v のグラフで表現され，u, v は共に同じ楕円型方程式を満たしていて，$\Omega^*(T) \subset \Omega$ より，不等式 $u \geq v$ が成り立つ．しかも点 Q で $u - v = \nabla(u - v) = 0$ を満たしている．このことと強最大値の原理（文献 8), Chapter 3 または文献 20), Chapter 4 を参照）より $u \equiv v$ が従い，Ω は平面 $P(T)$ について対称になる．

関数 Φ を

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j$$

として適用すると「シャボン玉は丸い」という定理が得られる．この場合に限って，Reilly は Weinberger の文献 24) に刺激されて Aleksandrov's reflection principle によらない証明を文献 19) で与えている．また，正定数 R について

$$\Phi = -\prod_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{R} - \kappa_j\right]$$

が，熱方程式に関する「初期温度を 1，境界の温度を 0 とする有界な熱伝導体 Ω の熱流について，もし，Ω のある真部分領域 D の境界 ∂D が常に等温面になっているならば Ω は球に限る」という定理の証明に役立った（文献 15, 21) を参照）．この定理で，特に Ω と D が中心を共有する球の場合は，D の境界 ∂D は常に等温面になっていて，この問題の自明解に相当する．

3. 過剰境界条件の問題

解がわかってしまう問題から始めよう．$\mathbb{R}^3$ の滑らかな有界領域 Ω と $3\lambda + 2\mu > 0$, $\mu > 0$ を満たす 2 つの実定数 λ, μ について，次の線形等方弾性体のつりあいの方程式の境界値問題を考える．

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\ \vec{u}) = \vec{0},\ x \in \Omega,$$
$$\lambda(\mathrm{div}\ \vec{u})\vec{\nu} + \mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T)\vec{\nu} = \beta\vec{\nu},$$
$$x \in \partial\Omega.$$

ここで，$\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ は弾性体の変位ベクトル，$\beta \neq 0$ は定数，$(\nabla\vec{u})^T$ は $\nabla\vec{u}$ の転置行列，$\vec{\nu}$ は Ω の単位外向き法線ベクトルを表す．上の境界条件は弾性体表面に一様な圧力 $-\beta$ がかかっていることを意味する．文献 6), pp.256–257 において考察されているように，上の境界値問題の解は次で与えられる．

$$\vec{u} = \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu}(x - x_0), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

ここで，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は任意に固定した点である．この $\vec{u}$ は上の方程式の自明解と見なせる．さらに境界での変位ベクトルを指定する境界条件

$$\vec{u} = \alpha\vec{\nu},\ x \in \partial\Omega \tag{2}$$

を課そう．ここで，α は $\alpha\beta > 0$ を満たす定数である．このとき，(1) と (2) を合わせて，Ω は点 x_0 を中心とする半径 $r = \frac{\alpha}{\beta}(3\lambda + 2\mu)$ の球であることがわかる．つまり，過剰な 2 つの境界条件を課すことによって球の特徴付けが得られた．

上の問題は物理的には意味があって興味深いが数学的には簡単に解けてしまう．数学的に自明ではない問題として，Serrin は文献 22) の中で，$\mathbb{R}^N$ の滑らかな有界領域 Ω 上の Poisson 方程式の境界値問題

$$-\Delta u = 1,\ x \in \Omega,\ \text{and}\ u = 0,\ x \in \partial\Omega$$

の解 $u = u(x)$ がさらにある定数 c について

$$|\nabla u| = c,\ x \in \partial\Omega$$

を満たすならば，Ω は半径 $r = Nc$ の球に限ることを示した．ここで，特に Ω が中心を $x_0 \in \mathbb{R}^N$ とする半径 r の球の場合は，

$$u(x) = \frac{1}{2N}(r^2 - |x - x_0|^2)$$

となり，これはこの問題の自明解に相当する．Serrin の方法は Aleksandrov's reflection principle と最大値の原理による方法で一般性があり，同様の結果がより一般の 2 階の非線形楕円型境界値問題について成り立つことが文献 22) で示されている．Weinberger は文献 24) で特に上の Poisson 方程式の境界値問題について同じ結果を Aleksandrov's reflection principle によらない方法で示している．

自明解が球より一般な ellipsoid である過剰境界条件の open problems が文献 11) で紹介されていて興味深い．

4. Gidas–Ni–Nirenberg の問題

$\mathbb{R}^N$ の球 B 上の非線形 Poisson 方程式の境界値問題

$$-\Delta u = f(u),\ x \in B,\ \text{and}\ u = 0,\ x \in \partial B$$

の正値解 $u=u(x)$ を考える．ここで $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 連続であるとする．簡単のため B を原点中心の球とするとき，$|x|$ にのみ依存する解 $u=u(|x|)$ が容易に予想される．逆に，Gidas–Ni–Nirenberg は文献 7) において，正値解 u はいつでも $|x|$ にのみ依存することを Aleksandrov's reflection principle と最大値の原理による方法で示し，さらにより一般の楕円型境界値問題について正値解の対称性の定理を示している．今では多くの教科書に上の非線形 Poisson 方程式の境界値問題について Gidas–Ni–Nirenberg の方法が紹介されている（文献 5, 18, 20) を参照)．また，文献 2) に本質的な一般化がある．

5. 対称性を決定する逆問題

$\mathbb{R}^N$ の有界な凸領域 Ω において，$u=u(x,t)$ を次の熱方程式の初期境界値問題の一意解とする．

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\Delta u, & (x,t)&\in\Omega\times(0,\infty),\\ u&=0, & (x,t)&\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u&=1, & (x,t)&\in\Omega\times\{0\}.\end{aligned}$$

熱方程式の強最大値の原理（文献 20), Chapter 4 を参照）からすぐに

$$0<u(x,t)<1,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$$

が成り立つ．各時刻 $t>0$ に対して，2 つの集合 $M(t)$ と $C(t)$ を

$$\begin{aligned}M(t)&=\{x\in\Omega\mid u(x,t)=\max_{y\in\Omega}u(y,t)\},\\ C(t)&=\{x\in\Omega\mid\nabla u(x,t)=0\}.\end{aligned}$$

で定める．$M(t)\subset C(t)$ であって，$M(t)$ の要素は hot spot と呼ばれる．文献 3) の結果より，Ω の凸性から関数 $\log u(x,t)$ は x の関数として凹関数になり，このことと $u(x,t)$ が x について実解析的であることより，各時刻 $t>0$ について 1 点 $x(t)\in\Omega$ が存在して

$$C(t)=M(t)=\{x(t)\},\quad t>0 \tag{3}$$

が成り立つことがわかる．簡単のため $0\in\Omega$ とする．Klamkin は文献 14) において hot spot $x(t)$ が動かないことを考察し，予想「もし $x(t)\equiv 0$ ならば，領域 Ω は原点について点対称である」を提出した．これは Ω として 2 次元における正三角形を考えることにより，Gulliver–Willms と Kawohl（文献 10, 12) を参照）によって否定された．その後 Chamberland–Siegel は文献 4) で次の予想を提出した．

予想 2（Chamberland–Siegel）もし $x(t)\equiv 0$ ならば，領域 Ω は直交群のある essential な部分群 G の作用について不変である．

ここで G が essential とは，任意の零でないベクトルに対してそれを不動点としない G の要素が必ず存在するということである．もちろん，領域 Ω が直交群のある essential な部分群 G の作用について不変であることは，$x(t)\equiv 0$ であるための十分条件である．なぜならば，領域 Ω が直交群のある essential な部分群 G の作用について不変であるとすると，初期境界値問題の解の一意性より，解 u 自身も G の作用について不変になるからである．つまり，

$$u(x,t)\equiv u(gx,t)\quad x\in\Omega,\ t>0,\ g\in G$$

が成り立ち，このことと G が essential であることから $\nabla u(0,t)=0$ $(t>0)$ が従い，(3) から $x(t)\equiv 0$ であることがわかる．このように Ω がある essential な部分群 G の作用について不変であることはこの問題の自明解に相当する．**予想 2** について次の結果がある．

定理 3（文献 16, 17)） $N=2$ のとき，$x(t)\equiv 0$ を仮定する．このとき次が成り立つ．

(i) もし Ω が三角形ならば Ω は原点を中心とする正三角形に限る．

(ii) もし Ω が四角形ならば Ω は原点を中心とする平行四辺形に限る．

(iii) もし Ω が五角形でその内接円がすべての辺に接するならば Ω は原点を中心とする正五角形に限る．

(iv) もし Ω が六角形でその内接円がすべての辺に接するならば Ω は角度 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, または π のどれかの回転対称性をもつ.

定理 3 の **(i)** において G は角度 $\frac{2\pi}{3}$ の回転から生成される巡回群であり, **(ii)** において $G = \{I, -I\}$ (I は単位行列を表す) である.

文献 21) に hot spot の挙動についての解説がある.

6. おわりに

ここで述べた問題の多くは逆問題と呼ばれる広範な問題の一種と見なせる. この種の問題は第 3 節の前半の弾性体の方程式の問題のように数学的に非常に簡単である場合や第 2 節の前半の Bernstein の問題のように数学的に非常に困難である場合の両極端の場合が多い. 問題への接近法も問題毎に様々であって, 興味深い問題に挑戦する楽しさがある.

参考文献

1) A.D. Aleksandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, Vestnik Leningrad Univ. 13, no.19 (1958), 5–8. (English translation: *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser.**2**, 21 (1962), 412–415.)

2) H. Berestycki and L. Nirenberg, On the method of moving planes and the sliding method, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **22** (1991), 1–37.

3) H.L. Brascamp and E.H. Lieb, On extensions of Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation. *J. Funct. Anal.* **22** (1976), 366–389.

4) M. Chamberland and D. Siegel, Convex domains with stationary hot spots, *Math. Methods Appl. Sci.* **20** (1997), 1163–1169.

5) L.C. Evans, Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, R.I. 1998.

6) H. Fujita, T. Ikebe, T. Inui, and H. Takami,「数理物理に現われる偏微分方程式 II」, 岩波講座 基礎数学『解析学 (II)』iv, 岩波書店, 1979.

7) B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209–243.

8) D. Gilbarg and N.S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", (Second Edition.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

9) E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations, Birkhäuser, Boston · Basel · Stuttgart, 1984.

10) R. Gulliver and N.B. Willms, A conjectured heat flow problem, in Solutions, *SIAM Rev.* **37** (1995), 100–104.

11) A. Henrot and G. Philippin, Some overdetermined boundary value problems with elliptical free boundaries, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), 309–320.

12) B. Kawohl, A conjectured heat flow problem, in Solutions, *SIAM Rev.* **37** (1995), 104–105.

13) C.E. Kenig and F. Merle, A Liouville theorem for the viscous Burgers's equation, *J. Anal. Math.* **87** (2002), 281–298.

14) M.S. Klamkin, A conjectured heat flow problem, in Problems, *SIAM Rev.* **36** (1994), 107.

15) R. Magnanini and S. Sakaguchi, Matzoh ball soup: Heat conductors with a staitionary isothermic surface, *Ann. of Math.* **156** (2002), 931–946.

16) R. Magnanini and S. Sakaguchi, On heat conductors with a stationary hot spot, *Ann. Mat. Pura Appl.* **183** (2004), 1–23.

17) R. Magnanini and S. Sakaguchi, Polygonal heat conductors with a stationary hot spot, preprint.

18) M. Murata and K. Kurata,『偏微分方程式 1』, 岩波講座 現代数学の基礎 **7**, 岩波書店, 1997.

19) R.C. Reilly, Mean curvature, the Laplacian, and soap bubbles, *Amer. Math. Monthly* **89** (1982), 180–188, 197–198.

20) M. Renardy and R.C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York · Berlin · Heidelberg, 1992.

21) S. Sakaguchi,『拡散方程式の解の空間臨界点と零点の挙動』,「数学」**54** 巻 3 号 (2002), 249–264.

22) J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (1971), 304–318.

23) J. Serrin and H. Zou, Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities, *Acta Math.* **189** (2002), 79–142.

24) H.F. Weinberger, Remark on the preceding paper of Serrin, *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (1971), 319–320.

(さかぐち・しげる, 愛媛大学理学部)

幾何学における０

曲率０の不思議

谷村 省吾

1. 幾何学の０とは何か？

私がいただいた題は「幾何学における０」である．難しい題である．のっけから言い訳で恐縮だが，困難の最大の理由は「幾何学における０とは何か」という問いに対する答えが定まっていないことにある．０と言えば，任意の数 a に対して $a+0=a$ を満たすもの，つまり和に関する零元という代数的定義を思い浮かべるのが常識的な発想であろう．０に相当するものが幾何学にあるだろうか，それは何だろうかという問いには，各人異なる答えを返すであろう．実際，何人かの数学者に「幾何学の０と言われたら何を思い浮かべますか？」と尋ねたところ，「空集合」（まさに０の原型），「点」（分割不可能なもの，０次元という意味で，あるいは関数の零点という意味で．スペクトルと言えばもっと代数幾何的だろうか．またホップの定理では接ベクトル場の零点に注目する），「消滅定理」（ある種の位相的障害が消えている）といった答えが返って来た．また，多様体の連結和を考えれば，球面は連結和に関する零元であると言える．編集部からは，「曲率０のパラドクス」という提案をいただいた．数学では平坦接続，物理ではアハラノフ・ボーム効果と呼ばれるものだ．そこで本稿では平坦な世界にも意外な不思議があるという話を紹介しよう．

2. 曲線の曲率と曲面のガウス曲率

曲面の曲率の話から始めよう[1)]．例えば球面は典型的な曲面であるが，面の曲がり具合というものをどうすれば定量的に表現できるだろうか？

曲がり具合の測り方の一つはガウスの曲率と呼ばれるものである．それを定義するためにまず曲線の曲率を定義する．図１のように曲線上の点Ｐから曲線に沿って長さ Δs だけ離れた点Ｑをとり，ＰとＱにおける接ベクトルの方向角の変化の大きさを $\Delta\theta$ としたとき，

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

という極限で定まる κ を，点Ｐにおける曲率と言う．κ の逆数は曲率半径と呼ばれる．

それでは曲面の曲率はどう定義するか？ ３次元空間に置かれた曲面上の点Ｐに対して，点Ｐを通る曲面内の曲線を引き，その曲線の曲率を測るというのは一つの案だ．しかし図 2(a) のように曲線の引き方は何通りでもあり，曲率はいくらでも異なった値をとることができてしまい，曲面そのものの曲がり具合を測っていることにはならないであろう．そこで，図 2(b) のように点Ｐを通る測地線をとることにする．測地線とは，いわば，曲面上に束縛された曲線としては可能な限りまっすぐな線であり，曲面上の２点を結ぶ最短曲線として特徴づけられる．この「できる限りまっすぐ

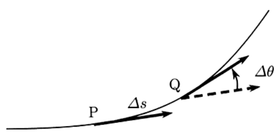


図１ 曲線の曲率．

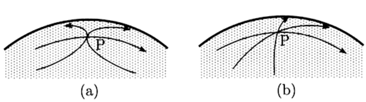


図２ 曲面の曲率を曲線の曲率で定義する．
(a) 点Ｐを通るいろいろな曲線．(b) 測地線．

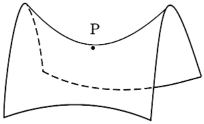


図３　負のガウス曲率.

に引かれた」測地線が曲がっていれば，それはもはや曲面そのものが曲がっているせいだと言えるだろう．ところが測地線に限ってもその選び方は一通りではない．そこでこれらの測地線の中で，点 P における曲率が最大となる測地線と最小となる測地線に注目する．じつはこの 2 本の測地線は互いに直交することが証明される．これらの測地線の曲率の最大値，最小値をそれぞれ $\kappa_{\max}, \kappa_{\min}$ とする．そこで，

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_{\max} + \kappa_{\min}), \qquad G = \kappa_{\max}\,\kappa_{\min}$$

で定義される量 H を点 P における平均曲率，G をガウス曲率と言う．

ただし，図 3 のようにある方向には凸に，それと直交する方向には凹に曲がっているような面に対しては，$\kappa_{\max}$ が正，$\kappa_{\min}$ が負になるように曲率の符号を定めておく．したがってこの場合はガウス曲率は負になる．

しかしこれらの曲率の定義の仕方は外来的*1) であることに注意したい．とくに曲線の曲率の定義は，この曲線が 2 次元平面や 3 次元空間にどう置かれているかということに依存している．もし曲線内に閉じ込められた生き物がいて，光もこの曲線に沿ってしか進まないとしたら，この曲線が曲がっているということをこの生き物は認識し得るだろうか？ それは無理であろう．この曲線が外から見てどう曲がっていようと，この世界の住人にとっては光はまっすぐ進むのである．他に逃げ場がないからである．この世界の住人にとって見える景色は，ファイバースコープを覗いているようなもので，ファイバーがどう曲がろうと，いつも景色は真正面に見える．曲線から一歩も出ることのない住人にとっては，曲線は直線と区別がつかないのである．

同様に曲面の曲がり具合を測るときも，それは曲面の外にいる人の視点からのみ測られるものなのか，それとも曲面に束縛された住人にも認識可能な曲がりなのか，考える必要がある．

*1)　その空間の内にある視点ではなく外にある視点から観測されるという意味で「外来的」という言葉を用いることにする．

3. ホロノミーとリーマン曲率

曲面から一歩も出ることなく，曲面の曲率を定義できるだろうか？ リーマン曲率を用いればそれはできる．曲面に接ベクトルを置いて，これを閉曲線に沿って平行移動していって元の地点に戻ると接ベクトルの向きが変わっていることがある．見やすい例としては，球面上で図 4(a) のように北極点から出発して子午線に沿って進み，赤道を 4 分の 1 周して，また子午線に沿って北極点に戻るという道筋に沿って接ベクトルを平行移動した場合であろう．この場合，出発点に戻って来た接ベクトルは 90° 向きが変わっている．このように平行移動の結果として生じる接ベクトルの正味の回転をホロノミーと言う．ホロノミーは球面に束縛された住人にも認識可能な「曲がり」の現れである．今の例では，閉曲線が囲む立体角は全球面の 8 分の 1 だから $4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\pi$ であり，これはホロノミー角に等しい．

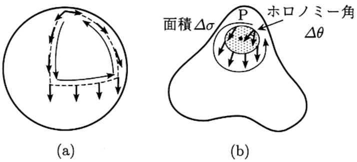


図４　平行移動とホロノミー.

一般に，曲面上の点 P を囲む微小な閉曲線に沿った平行移動に伴うホロノミー角 $\Delta\theta$ は閉曲線が囲む微小面積 $\Delta\sigma$ に比例する．この面積を小さくしていった極限で

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma}$$

が有限な値に収束すれば，K を点 P におけるリーマン曲率と言う．半径 R の球面の場合，点 P をどこにとっても $K = 1/R^2$ になる．リーマン曲率は曲面内にとどまっている住人によって測定可能な曲率であり，その意味で内在的な曲率と呼ばれる．それに対して曲線の曲率や平均曲率は外来的な曲率である．しかし，ガウス曲率 G については $G = K$ という関係が成り立つ．

4. 円筒と円錐の曲率

ところで円筒の側面の上で接ベクトルを平行移動す

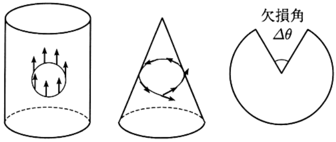


図5　円筒と円錐上の平行移動，円錐の展開図．

るとホロノミー角は0である．このことは円筒の展開図を見ればわかりやすい．円筒は見かけ上，つまり外来的には曲がっているが，内在的には平坦なのである．展開図を描けるということ自体，じつは平坦であるということの現れである．

それでは円錐の側面の曲率はいくらであろうか？ 円錐は円筒と同様，平面に展開できるので，ホロノミーは0である．ところが頂点を囲むような閉曲線に沿って平行移動したときには0でないホロノミーを生じる．そのホロノミー角は，円錐を展開したときに現れる欠損角に等しい．頂点を囲んで一周する限り，どんなに小さな閉曲線でもホロノミー角は一定である．頂点を囲まない閉曲線ならばすべてホロノミー角は0である．この意味で，円錐の曲率は頂点にだけ集中しており，そこでの曲率は無限大であり，他の場所の曲率は0である．

5. 折れ線と回転数

滑らかな曲線ではなく，折れ線に対しては，頂点の前後の距離 $\Delta s \to 0$ という極限で接ベクトルの方向角の変化 $\Delta\theta$ が0でない有限な値にとどまるので，曲率 $\kappa = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ が発散してしまう．この場合は折れ角 $\Delta\theta$ そのものを考察の対象にする．

さて，図6のように平面上の折れ線で囲まれた図形，すなわち多角形について，各頂点の折れ角（外角）$\Delta\theta_i$ の和はいくらになるだろうか？ 一周して元の向きに戻るという直観から明らかであるが，

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi$$

となる．ちなみに多角形の頂点の内角 $\Delta\phi_i$ は $\Delta\phi_i + \Delta\theta_i = \pi$ を満たすので，n 角形について

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i + 2\pi = n\pi.$$

つまり，内角の和が $\sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i = (n-2)\pi$ となることが容易に理解される．一般に，自己交差を許された閉じた折れ線に対しては，折れる方向の左右に応じて $\Delta\theta_i$ に正負の符号をつけて足したとき

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi m$$

が成り立つ．m は折れ線の回転数と呼ばれる整数である．折れ線を「正則に変形」しても回転数は変化しない．ここでいう正則な変形とは，辺と辺とが重なることを許さない範囲で頂点の位置を連続的に変化させることである．

さらに一般に，滑らかな曲線部分と折れ線部分とを有している閉曲線 C に対しては，滑らかな区間にわたる曲率の積分と，外角の和について

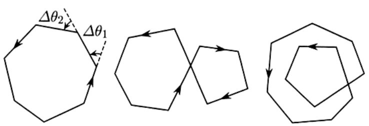
$$\int_C K\,ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi m$$

という関係が成り立つ．曲率がデルタ関数的に集中した点が頂点だと言える．

6. 折れ面とオイラー数

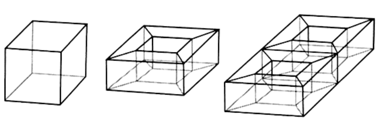
多角形の欠損角の和が連続変形で変わらない回転数という意味を持ったように，多面体の頂点の欠損角 $\Delta\theta_i$ の和も何か意味のある量になるだろうか？ じつはオイラー数と呼ばれる位相不変量になる：

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 4\pi(1-g).$$



$m=1$　　$m=0$　　$m=2$

図6　折れ線の外角と回転数．



$g=0$　　$g=1$　　$g=2$

図7　種数．

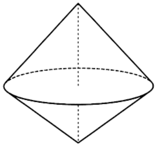


図 8　2 つの円錐を貼り合わせた図形.

ここで g は 0 または正の整数であり，種数と呼ばれる（図 7）．トーラスに同相な多面体は，負の欠損角（正の剰余角）を持つ頂点も持っていることに注意してほしい．これを 2π で割った $\chi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2(1-g)$ は，頂点の個数 V と，辺の個数 E と，面の個数 F で定義されるオイラー数 $\chi = V - E + F$ に等しい．

一般に，滑らかな面と，滑らかな辺と，頂点とで構成された閉曲面に対しては，曲面上のリーマン曲率 K の面積分と，辺上の測地的曲率 k（これは定義を与えていないが，図 8 のような 2 つの円錐を貼り合わせた図形を考えて，どう定義するのが適切か考えてみてほしい）の線積分と，頂点の欠損角の和が

$$\int_S K\, d\sigma + \int_C k\, ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 4\pi(1-g)$$

という関係式を満たす．これはガウス・ボンネの公式と呼ばれる．とくに，至るところ滑らかな閉曲面に対してはこの関係式は $\int_S K\, d\sigma = 4\pi(1-g)$ となり，曲面の曲率 K という局所的に定義された量を空間全体にわたって集めて，空間の大域的特徴を捉えるという意義を持つ．

7. ゲージ場による平行移動

ここまでは接ベクトルの平行移動と，ホロノミー，曲率を考えてきたが，平行移動されるものは接ベクトルばかりとは限らない．数学的にはベクトル束の平行移動という概念へと拡張できる[2)]．物理的には波動関数や場の量の共変微分と呼ばれる概念だ．あるいはゲージ場と言ってもよい．

多様体の各点 x に場の量（複素数または複素数のベクトル）$\psi(x)$ が定められているとき，点 P を通過する滑らかな曲線に沿って場の量の変化を調べることを考える．適当な座標系で曲線上の点を $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t))$ と表し，$x(0) =$P とする．実数 t が十分小さいとき点 $x(t)$ で定められた場の量 $\psi(x(t))$ を $\psi(\mathrm{P})$ と比べるために，$\psi(x(t))$ を点 P に平行移動した量を

$$\psi_{\|}(t) = \psi(x(t)) + \sum_{\mu} A_\mu \psi(x(t))(x^\mu(t) - x^\mu(0))$$

で定める．ここに現れた係数（一般には行列）$A_\mu(x)$ をゲージ場と言う．曲線 $x(t)$ に沿った点 P における共変微分を

$$\begin{aligned}\frac{D\psi}{dt} &:= \lim_{t\to 0} \frac{\psi_{\|}(t) - \psi_{\|}(0)}{t} \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + A_\mu(x)\psi(x) \right) \frac{dx^\mu}{dt}\end{aligned}$$

で定める．曲線 $x(t)$ 上の各点で $\frac{D\psi}{dt} = 0$ が成り立っていれば，$\psi(x(t))$ は曲線に沿って平行移動されていると言う．

閉曲線に沿って場の量を平行移動して出発点に戻ると，場の量の値は必ずしも元の値には戻らず，ある種の回転を受けることがある．この正味の回転を再びホロノミーと呼ぶ．ホロノミーを局所化したものがゲージ場の曲率を定める．曲率は平行移動の非可積分性として特徴づけられる．つまり，x^μ 方向に ψ が平行移動されたとしたら，

$$D_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + A_\mu(x)\psi(x) = 0$$

という式が成り立つのだが，x^μ 方向と x^ν 方向の平行移動が両立するためには

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}(-A_\mu \psi) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(-A_\nu \psi) \\ &= -(\partial_\nu A_\mu)\psi - A_\mu \partial_\nu \psi + (\partial_\mu A_\nu)\psi + A_\nu \partial_\mu \psi \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\psi\end{aligned}$$

が消えなければならない．ここに現れた

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu$$

という量をゲージ場の曲率と言う．もし曲率が 0 でなければ，x^μ 方向と x^ν 方向の平行移動は両立せず，これら 2 つの軸が張る面上の閉曲線に沿って ψ を平行移動するとホロノミーを生じる．

物理的には ψ は荷電粒子の波動関数であり，A_μ はベクトルポテンシャルあるいはゲージ場と呼ばれるものであり，$F_{\mu\nu}$ は電磁場である．電磁場中を荷電粒子が通過すると，粒子の軌道が曲がる．物理的にはローレンツ力と呼ばれるものだが，幾何学的な曲率の現れと見ることもできる．

8. アハラノフ・ボーム効果

円錐はリーマン曲率0であるにも関わらず，円錐の頂点を一周するときだけ0でないホロノミーが現れたように，ゲージ場においても曲率が0であるにも関わらず，ある空間を一周したときだけ0でないホロノミーを生じることがある．

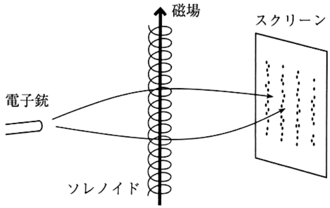


図9　アハラノフ・ボーム効果．

図9のように磁場を細い円筒に閉じ込めて，円筒をまたぐように電子ビームを照射して，円筒の後ろのスクリーンに電子が当たる様子を観察すると，電子は磁場のない場所だけを通ってきたのにも関わらず，スクリーンの各点に電子が到着する確率は磁場の強弱の影響を受けることが観察される．磁場の周りを一周したとき生じるホロノミーの値によって，電子の波動関数の干渉が影響を受けるのである．円錐の頂点をまたいで平行移動した2本のベクトルが，欠損角の分だけ向きがそれて，ベクトルの和が大きくなったり小さくなったりするように，磁場をまたいで重なり合った電子の波動関数の値も大きくなったり小さくなったりして，電子の到着確率が変化するのである．この現象をアハラノフ・ボーム効果と言う．「曲率が0であってもホロノミーは0にならない現象」と言えばよいだろうか．

9. 2+1次元のアインシュタイン重力

曲率が関わる物理の風変わりな話題として，2+1次元のアインシュタイン重力理論を紹介しよう[3)]．この「2+1次元」とは空間2次元，時間1次元の時空があったとしたらという意味である．

3+1次元は我々が経験する通常の時空であり，この世界では重力はアインシュタインの一般相対性理論で記述される．つまり重力の原因は時空の曲がりに帰着される．曲がり方がそんなにひどくない状況では，一

般相対性理論はニュートンの万有引力理論で近似され，質点は距離の 2 乗に反比例する引力で引き合うという法則性が現れる．

2+1 次元の時空にアインシュタインの一般相対性理論を適用すると奇妙なことが起こる．一般に，アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ はリーマンテンソル $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ で定義されるが，2+1 次元の場合に限って，この定義式が逆に解けてしまう．つまり，リーマンテンソルがアインシュタインテンソルに比例して，反対称テンソル $\epsilon^{\lambda\mu\alpha}$ を用いて

$$R^{\lambda\mu}_{\nu\rho} = \epsilon^{\lambda\mu\alpha}\,\epsilon_{\nu\rho\beta}\,G^{\beta}_{\alpha}$$

と書けてしまうのである．一方で，アインシュタイン方程式は，適当な単位系で G を重力定数として（宇宙項がなければ）

$$G_{\mu\nu} = 2\pi G T_{\mu\nu}$$

という方程式であるから，2+1 次元では，物質のない場所，つまりエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が 0 になる場所では，時空の曲率も 0 になるということが結論されてしまう．もちろん重力波も伝播しない．素朴に 2+1 次元にニュートン重力理論を適用すると質点間には距離に反比例した引力が働くことが予想されるが，アインシュタイン重力理論によれば，質点間には力がまったく働かないのである*2)．つまり 2+1 次元ではアインシュタイン重力理論とニュートン重力理論はまったくの別物なのだ．

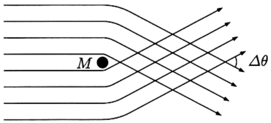


図 10　2+1 次元の天体のまわりの質点の軌道．

2+1 次元アインシュタイン理論では物質のある場所だけに時空の曲率は集中する．したがってこの世界では，物体のまわりの時空は円錐のように平坦であり，欠損角だけを持っている．計算によると[3]，質量 M の物体の周りでは

$$\Delta\theta = 2\pi GM$$

だけの欠損角を生じる．質量 M の物体にテスト粒子のビームを照射すると図 10 のように屈折することがわかる．この世界では物体は放物線を描いて落下することもなく，天体は楕円軌道を描くこともなく，ただひたすらこのような屈折軌道を描くことになるのであろう．そもそも真空中を伝わる引力というものが生じないのだから天体もできるかどうか怪しいものである．

2+1 次元のアインシュタイン重力世界があったとしたら，宇宙はほとんど至るところ平坦で，物質のあるところだけに曲率が局在し，物体たちはお互いにホロノミーだけを通して相互作用する世界になっているのである．こういう，あったかもしれない別の世界を想像してみると，我々の世界が相対化されて面白いのではなかろうか．

*2)　したがって 2+1 次元アインシュタイン重力理論では重力定数 G の符号を決める物理的理由もない．

参考文献

1)　小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』裳華房，改訂版 (1995). 剱持勝衛『曲面論講義』培風館 (2000). 梅原雅顕，山田光太郎『曲線と曲面』裳華房 (2002). とくに剱持氏の本はグラフィクスをふんだんに用い，曲面という，ついわかったつもりになってしまわれがちなものが，思いもよらぬほど豊かで美しい構造と多様性を持っていることを示してくれている．

2)　小林昭七『接続の微分幾何とゲージ理論』裳華房 (1989).

3)　S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft: "Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space", *Annals Phys.* **152** 220 (1984). 2+1 次元重力についての Jackiw の講義ノート "Update on planar gravity" が `http://ccdb3fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?200032232` で手に入る．私が大学院生のときに原子核三者若手夏の学校で聴いた懐かしい講義である．

（たにむら・しょうご，大阪市立大学大学院工学研究科）

量子論における0

宮沢 弘成

1. はじめに

0とは何か？ それは量的に何も無いことであり，順序的には出発点であり，集合論では空集合のことであろう．量子物理学における0とは何かを考えるのがこの小論の目的である．

むかし『0の発見』(吉田洋一著，岩波書店) という本を読んだことがある．0は数学における画期的な発見であり，これにより数学は大発展を遂げる，ということであった．確かにその通りで，0について考えればいくらでも奥深く考えられる．しかしそれほど深刻に考えなくても0を使うことが出来る．子供に算数を教えていると，いつの間にか自然数とともに0を覚えてしまい，3引く3は0と正しく答える．簡単に済ますことも出来ないことはない．

量子力学においては0が特に華々しい活躍をしているとも思えない．ゼロというと，まず頭に浮かぶのは零点振動である．それの物理的意味などを考えることにする．ついで場の量子論で0とは何かと言えば真空のことであろう．真空は場の理論の根本であり，出発点であるが，それを何も無い状態として定義するのか，「何」とは何か？ などを禅問答でなく議論する．

2. 量子力学の0

量子力学で0が問題となるのは，物理量が確定値をとれない，つまりずれが0になり得ないことがあるからである．例として質点を平衡点に置いたときを考えよう．平衡点の近くでは位置エネルギーは

$$V = \frac{b}{2}(x-a)^2, \tag{1}$$

と書くことが出来る．ニュートンの力学では質点は $x=a$ で止まり，平衡状態となる．

量子力学ではこうはいかない．不確定性関係により，位置 x が a という確定値をとろうとすると，運動量 p が無限大になってしまう．x が a ではなくその周りに Δx 程度のばらつきを持つときは，p も確定値をとらず，Δp 程度のばらつきがあって，

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2, \tag{2}$$

というのが不確定性関係である．

質点が平衡点 $x=a$ にあることは出来ないし，止まっている，すなわち運動エネルギーが0もありえない．最も落ち着いた状態は位置エネルギーと運動エネルギーを足した全エネルギー

$$E = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{b}{2}(\Delta x)^2,$$

が最小になることであろう．式 (2) の条件の下で，

$$E \geq \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{b}{m}}, \tag{3}$$

が出てくる．右辺の値が最小値である．

以上は不確定性の関係式 (2) からのやや定性的な議論だが，量子力学で正確に解くと，エネルギー

のもっとも低い状態として，

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{b}{m}},$$
$$\langle(\Delta x)^2\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{mb}}\frac{\hbar}{2}, \tag{4}$$
$$\langle(\Delta p)^2\rangle_0 = \sqrt{mb}\frac{\hbar}{2},$$

が得られる．第 2,3 式はそれぞれ $(x-a)^2, p^2$ のこの状態での平均値である．

このように量子力学では質点は止まることがない．運動エネルギーがゼロになることは出来ない．最も落ち着いた状態は，全エネルギーが最小になるときである．これを基底状態と言う．これが出発点と言えるもので，添え字に 0 を振ってある．

繰り返しになるが，最低の基底状態でも質点の運動エネルギーはゼロでない．ふらふら動き回っていると言うべきである．これを零点振動と言っている．量子力学の象徴的現象である．

3. 零点振動

質点が常に動き回っていて，零点，つまり最低の状態でも止まって休むことが出来ないとは可哀想な話である．どうしてそうなるのか，実際の物理現象でどうなっているのか考えてみたい．

電子は量子力学で扱われることになっている．しかし電子は位置 $x(t)$ によって表されるよりは，$\psi(x,t)$ という「場」によって記述されるべきものなのである[1)]．位置エネルギー（式 (1) の形でも，一般に原子核の作る静電場でも）の中に置かれた電子は基底状態で

$$\psi_0(x,t) = \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\phi_0(x)$$

の形である．一見振動しているように見えるが，位相の回転は物理的のものではない．物理的に観測可能な電荷密度は

$$\rho(x,t) = -e|\psi|^2 = -e|\phi_0(x)|^2, \tag{5}$$

で，振動などしていない．しかし空間的に広がって分布している．

量子力学はこれらを質点の位置 $x(t)$ で記述しようとする．電荷が広がって分布しているのだから，点電荷で表すためには，それが動き回っているとしなければならない．これが零点振動である．動き回っているといっても，そこから光は出てこない．運動エネルギーが 0 でなくても，それを取り出して活用できないのだから，無いのと同じである．

振動があるかないか，運動エネルギーがゼロかどうか，といっても，何の振動か，何の運動エネルギーかをはっきりさせなければ意味がない．その点系の全エネルギーは間違いなく確定したものなので，それの最低状態を基底状態と定義するのは正しいやり方である．

4. 場の理論のゼロ

場の理論，正しくは場の量子力学である．それは

$$\text{量子化された場} = \sum \text{量子}$$

となる．電磁場は光子の集まりであり，電子場は電子の集まりである．

場のゼロ状態，すなわち何もない状態を真空と言う．量子が 0 個の状態を真空とすればよさそうで，簡単と思えるがこれでは済まなかった．ディラックの空孔理論が際立ったものである．

5. ディラックの真空

ディラックは電子の相対論的方程式を作り上げたが，厄介な事が生じた．方程式を解くと，まともな解の他に負のエネルギーを持ったものが出てくる．これは，エネルギーを放出しながらどんどん速くなるもので，もちろんそのようなものは世の中に存在しないから処分しなければならない．

この空間では電子が 1 個も無い状態はエネルギー最小ではない．負エネルギーの電子が存在したほうがエネルギーが低い．そこで負エネルギー状態に電子をはめ込んでいく．パウリの排他原理によって，電子は 1 状態に 1 個しか入れない．すべての負エネルギー状態に電子を入れると，それ以上は入れられない．これが全エネルギー最小の状態である．

これが電子場の基底状態であり，万事これから出発する．ここでエネルギーが $-E_j$ の電子を取

り除くと，系のエネルギーは $+E_j$ だけ上がる．孔があいたのだが，$+E_j$ のエネルギーを持つ粒子のように振る舞う．水の中で空気の泡が物の塊のように見えるのと同じである．負電荷の電子がなくなったので，孔は正電荷を持つように見える．

式で書いたほうが分かりやすい．電子場のエネルギーは

$$E = \sum n_i E_i + \sum n_j^-(-E_j), \qquad (6)$$

全電荷は

$$Q = -e\left(\sum n_i + \sum n_j^-\right),$$

と書ける．ここで n_i は正エネルギー E_i をもつ状態 i にある電子の数であり，n_j^- は負エネルギーに対するものである．パウリの排他原理から，電子は有るか無いかであり，電子数 n は 0 か 1 である．ここで負エネルギー状態で，有る，と無いとを取り替えて

$$n_j^+ = 1 - n_j^-, \qquad (7)$$

とする．n_j^+ は 1 か 0 である．これで

$$E = \sum n_i E_i + \sum n_j^+ E_j - \sum E_j, \quad (8)$$

$$Q = -e\sum n_i + e\sum n_j^+ - e\sum 1. \quad (9)$$

(8) 式の右辺第 3 項は無限大の定数だが，エネルギーの基準は何処にとってもよいからと捨てる．Q の式 (9) の右辺第 3 項は無限大の電荷で黙って捨てるわけにはいかないが，陽子場の同様項と打ち消すとしてやはり捨てる．

E, Q の右辺第 2 項は，電子と同じエネルギーをもち，正電荷の粒子を表している．これが電子の反粒子，陽電子である．基底状態は電子も陽電子も 1 個も無い状態，すなわち全ての i, j に対し

$$n_i = 0, \ n_j^+ = 0,$$

で，これが真空と呼ばれるのにふさわしいものである．真空とは何も無い空間のことだが，「何」とは何かが問題である．負エネルギーを持つもともとの電子が無いのではなく，観測にかかるもの，つまり粒子，反粒子などが無いことが真空の条件である．

6. 裸の真空と着物を着た真空

前節末の結論で話は終わらない．第 4 節で場は量子（＝粒子）の集団と書いたが，粒子の間には力が働く

$$\text{沢山の場} = \text{粒子群} + \text{相互作用}. \qquad (10)$$

荷電粒子と電磁場との間には電磁相互作用が，核子とパイ中間子の間には湯川相互作用が働く．弱い相互作用というのもある．相互作用が場をかき回し，物事をややこしくするが，面白くもする．

粒子が 1 個も無い「真空」は安泰ではない．相互作用は「何」も無いところから粒子を作り出すことが出来る．具体的には，例えば電子と電磁場の相互作用は電子，陽電子，光子の組を作り出し，湯川相互作用は核子，反核子，パイ中間子を作る．次の段階でこれらの粒子の組は相互作用によって消され，無に戻る．エネルギーが保存していないではないか？ 心配は無用で，時間とエネルギーとの間に不確定性関係があり，短時間 Δt の間ならば

$$\Delta E \approx \hbar/\Delta t$$

程度のエネルギー非保存は許されるのである．

このように，粒子が 1 個もない「真空」は定常ではない．相互作用が有るときは，正しい定常状態は「真空」に相互作用によって造られた粒子群が混ざったものである．エネルギーは少し下がって $-E_0$ となるだろう．「真空」のエネルギーを 0 と決めたのならば $-E_0$ を勝手に変えるわけにはいかない．これがエネルギーがより低い基底状態であり，本物の真空と呼びたいものである．

始めの「真空」を裸の真空と言う．これに対し今求まったのは相互作用の着物を着た真空である．粒子状態についても同様のことが言える．裸の粒子に相互作用を着せれば着衣の粒子になる．それは裸の粒子に，（短時間だけ）仮に造られた粒子群が混ざったものである．止まった（着衣）粒子のエネルギー（$/c^2$）は静止質量 m で，これが実験で測られるものである．裸の質量 m_0 は，相互作用のない世界はないので，実測することができない．

さてこれからやるのは全てのものを着衣のもの

で記述することである．この操作は繰り込みと呼ばれる．上に述べたように，粒子の性質，すなわちその質量，結合定数，その他の振る舞いも全て着衣の上で測られるものである．

着衣の真空は，裸の粒子の混ざりあったものであるが，着衣（実際の）粒子が1個も無いと言う意味で真の真空である．そのエネルギーを0に決めなければならない．真空はどの座標系で見ても真空であるはずだが，そのためには運動量，エネルギーの4元ベクトルが $(0,0,0,0)$ でなければならない．これが場の理論の0である．

7. 複雑な真空

今までに考えたことは，真空とはエネルギーが最低の基底状態であり，そのエネルギーを0とすることである．普通，例えば量子電磁力学では，真空は裸の真空にほぼ等しく，相互作用という摂動によってわずかに乱されただけである．

しかし相互作用が強いときには全く異なる事情となることがある．クォーク・グルオンの物理である量子色力学では，エネルギーが最小の状態は極めて複雑な，いわばスーパーの状態であると考えられている．スーパー状態とは，超伝導状態のようなものと言うのが分かりやすい．超伝導状態は電気抵抗が無くなるほかに，磁界がその中に入れないという特徴がある．超伝導状態内に磁極N，Sを置くと，Nから出た磁力線は超伝導状態を押しのけてトンネルを作ってSに達し，周りの押す力と釣り合って一定の太さのひも状となる（図1）．量子色力学でも同様で，基底状態はスーパーであり，そこに置かれたクォークから出た力線はひも状となって他のクォーク・反クォークに達し，これがクォークに働く一定の力となる．

クォーク力学の詳細は他の機会[2]に譲るが，ここで言いたいのは，量子色力学ではエネルギーが最小の状態はスーパー状態であり，その中にできた正常状態のトンネルがもののように見えるということである．私たちはこのスーパー状態を真空とよび，エネルギーをゼロとする．スーパー状態なのだから，何もないとは言えないのだが，それをゼロに繰り込んでしまうのである．

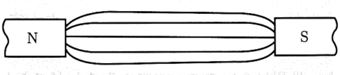


図1　超伝導体内の磁力線．

しかし繰り込みの処方は，相互作用が弱く摂動論のときは有効に使えるが，摂動論以外のときはうまく行くとは限らない．量子色力学の場合，クォークは力線を伴っているので，スーパー真空の中には入れない．その中にできた正常状態の袋（トンネル）の中に入っている．外から見ればクォーク・反クォークの入った袋は真空中に浮かぶ中間子，重粒子である．袋の中はクォークにとって正常の空間であり，ここでは摂動論が使えることが分かっている．袋の中が彼らの真空である，といった事態となる．

縮退した真空の問題もある．有限自由度の量子力学では最低エネルギーの状態，つまり0は必ず1個であるが，自由度無限大の場の理論ではそうとは限らない．基底状態が縮退しているとき，すなわち最低エネルギー状態が2つ以上有るとき真空をどう定義するか？ 選んだ基底状態が非対称だとどうなるか？ これらについては本特集の他の項目で述べられるはずである．

8. さいごに

量子力学では運動エネルギーが0にはなり得ないので，全エネルギーが最小ということで0を定義する．場の量子論で真空を定義するのに，「何も無い」では定義になっていない．やはりエネルギー最低で真空を定義し，これを0とするのだが，いろいろ問題も生じる．

参考文献

1) 宮沢弘成：数理科学 **39** 巻9号34頁，サイエンス社(2001).
2) たとえば大槻義彦編：『物理学最前線 1』，共立出版(1985).

（みやざわ・ひろなり，東京大学名誉教授）

素粒子の0電荷問題とその解決

漸近自由理論の発見

青木　健一

1. 電磁気の理論

電子は電荷を持つ．電荷は周囲の空間に電場を作り出し，電場のある空間では電荷は力を受ける．電荷が動くと電流となり，周囲の空間に磁場を作り出す．そして，磁場のある空間では，電流は力を受ける．ずっと以前から個別に発見されて来たこれらの電磁現象は，19世紀中頃にマックスウェルによって1つの理論に統一された．

現在では，電子の電荷は素電荷と呼ばれる電気量の最小単位である．不思議なことに（今では素粒子の統一理論で説明できるが），陽子の持っている電荷とちょうど符合が反対で大きさが厳密に等しい．そのため，中性の原子では，原子核中の陽子の電荷と周りの電子の電荷を合わせると0になって，電気的な力は中和される．

変化する電場と磁場がお互いに相手を誘起する現象は電磁誘導と呼ばれ，そのくり返しで，ある場所での場の振動が他の場所へと伝播し波を作る．この電場と磁場の波すなわち電磁波の存在は，マックスウェルによって予言され，その後ヘルツによる実験で確かめられた．しかも予言された電磁波の速度が，当時測定されていた光の速度に合うことから，光の正体は電磁波だということまでわかってしまった．

19世紀物理学（古典物理学）の偉大な成果，光の正体の解明は，逆に古典物理学では解決できない矛盾を導く．光の速度が座標系にどう依るかという問題と空洞での光の熱力学の問題から，相対性理論と量子論という20世紀物理学への入り口が開かれた．ほどなく，マックスウェルの理論は，電子と光を記述する相対論的量子力学として量子電気力学（QED）に衣替えされ，この世の森羅万象を説明すると期待された．歴史的に量子「電気」力学という名前になってしまったが，もちろん電気も磁気も全部入っている．

さて，量子電気力学では，電子の電荷は一つの物理量である．そして，計算可能な量子力学的な補正（量子補正）がある．この量子補正をきちんと計算すると，電子の電荷は実は0になってしまう，というのが「0電荷問題」である．

2. 物質中の電荷は小さく見える

最初から量子電気力学の計算をしてみせるわけにはいかないので（と言いつつ最後までしないけれど），まずは，古典物理学のマックスウェル理論でも電子の電荷には補正があって，それは高校物理でもちゃんと登場している，という話から始めよう．真空中に電荷 e の電子があると，周りに放射状の電場 E を作る．

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r^2}. \tag{1}$$

ここで ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数であり，r は電子からの距離である．

真空中での実験は大変難しいし，普通の物理現

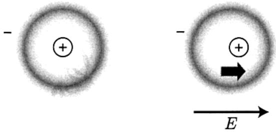


図１　原子の誘電分極.

象は大気中で起こる．大気中に電子を置いたときに作られる電場は (1) 式と同じだろうか．大気は窒素や酸素などの気体分子からできている．気体分子は中性なので，電子が近くにあっても何も感じないから何も影響せず，大気中でも同じ電場が作られる，というのは大まかには正しいのだが，小さな効果がある．分子は中性でも，その構造をミクロに見ると，正電荷の原子核の部分と負電荷の電子が集まって全体として中性になっているに過ぎない．そのような複合系に電場をかけるとどうなるかを考えてみよう．

ここでは話を簡単にするために，大気は水素原子からできているとしよう．水素原子は，図１の左側にあるように，中心の陽子の周りに電子が均等に分布している．電子の位置の量子力学的な分布の平均は，陽子の位置に一致している．ここに右向きの電場をかける．陽子は右向きに引っ張られ，電子は左向きに引っ張られる．それぞれが逆向きに引っ張られる効果によって，電子の量子力学的な分布がゆがみ，分布の中心が陽子の場所からずれる (図１右)．するとこの複合系は，合計の電荷は０であるが，負の電荷と正の電荷が少し離れて位置しており，電気双極子モーメントを持つことになる．これを，電場による原子の分極，誘電分極と呼ぶ．電気双極子モーメントを，負電荷から正電荷の向きを正として矢印で表すと，かけた電場と同じ向きになる．

電気は通さないが，電場をかけることによってその構成要素が分極を起こす物質を誘電体と呼ぶ．電場を感じて外からわかる反応をする物質という意味である．したがって大気も誘電体である．誘電体の中の電場がどうなるか，コンデンサーを使って考えよう．図２は高校物理の練習問題だ．真空

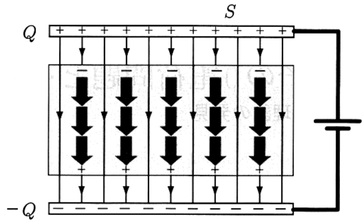


図２　コンデンサー内の誘電体.

中の極板面積 S のコンデンサーに電荷 Q を置くと極板間の電場は次のようになる．

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \tag{2}$$

この極板の間に誘電体を挿入する．誘電体に一様電場をかけると，分極が一様に起こり，電気双極子モーメントが同じ方向に並ぶ．並んだ双極子モーメントの一つ一つは，ずれた正電荷と負電荷なので，お互いにキャンセルし合うが，頭と尻尾の所だけは隠しようがない．端に現れる電荷を誘導電荷と呼ぶ．この誘導電荷が極板の電荷から出る電気力線の一部を吸い取ってしまう．そのため，誘電体内部の電場は弱くなる．誘電分極の強さは，かけられた電場が弱いうちはかけられた電場の強さに比例するはずである．したがって，誘電体内部の電場 E' は，結局，極板上の電気量が減ってしまう効果で表現できる．

$$E' = \frac{Q}{\epsilon^*}\frac{1}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{\epsilon^*}E. \tag{3}$$

この効果の強さ $\epsilon^* \geq 1$ をその誘電体の比誘電率と呼ぶ．この効果は，コンデンサーに誘電体を挿入すると，同じ電圧で貯められる電気量が増大するという事実として，ファラデーによって初めて発見された．

大気中の電子に話を戻そう．大気の比誘電率は $\epsilon^* = 1.0005$ の程度である．つまり大気中に置かれた電子が作る電場は，$1/\epsilon^* = 0.9995$ 程度に小さくなる．図３に見るように，大気中の電気双極子が方向を放射状にそろえることによって，いわば電荷の一部が遮蔽されるのである．これを分極

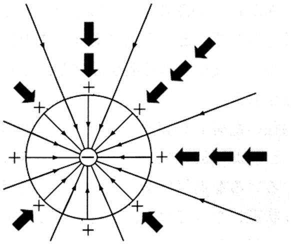


図 3　分極による電荷の遮蔽．

による電荷の遮蔽と言う．電場が小さくなってしまうから，電子の間に働く力も真空中に比べて弱くなる．大気では小さな効果だが，ガラスの比誘電率は 5，水だと 80 にもなる．

結局，一般の媒質中の電子の電荷は，真空中での値よりも小さく観測される．プロ野球に興味なんかないと言いつつ，阪神が走り出すと急に阪神ファンになって応援にかけつけて人垣を作り，おかげで遠くから選手が見えなくなる，というようなものだ．

3. 裸の電子は見ないことにする：くりこみ理論

量子電気力学に進む．問題は真空中での電子の電荷の大きさである．量子電気力学は，場の理論と呼ばれる相対論的な量子力学である．それ以前の物理理論では，真空とは何もない状態，つまり空っぽの容れものに過ぎず，物理学の対象の外にあったが，場の理論では，真空というのはあらゆる物理的実体を包含し豊かな性質を持つ物理的対象である．この媒質としての真空の比誘電率はいくらなのか，というのが問題である．

量子電気力学の物理的内容を一言で述べよう．光と電子の理論であって，電子は光を放出したり吸収したりできる．これを図 4 のグラフで表現する．実線が電子，波線が光である．電子の電荷 e という量は，この素過程がどの程度の確率で起こるかを示す定数となり，電子と光の（あるいは量子電気力学の）相互作用定数とも呼ぶ．グラフは

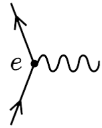


図 4　量子電気力学の素過程．

量子力学的な確率振幅を表現する．確率はその 2 乗だから，この過程の確率は電荷 e の 2 乗に比例する．電荷が大きいほど，光を出したり吸ったりしやすいわけだ．

図 4 には時間方向が書かれていない．それは自由に取れるのである．下からきた電子が光を放出する，というのが一つの可能な素過程である．下側の電子が過去で，光と上側の電子が未来である．光の線を過去に読み替えると，電子が光を吸収する過程だ．電子の線の矢印は電荷の流れの向きを表すのだが，これが時間方向と逆になると，電子の反粒子である陽電子が走ることを表す．だから，時間方向を上から下にとると，陽電子が光を放出したり吸収したりする過程になる．面白いのは，時間が左から右に流れると読む場合である．電子と陽電子がやってきて光に変わる，つまり対消滅を表す．時間を右から左にとると，今度は光が電子と陽電子に変わる，つまり対発生である．これらのあらゆる過程の確率振幅が同じ電荷 e で表されるのは相対性理論の帰結である．

さて，可能な限り素過程を組み合わせた過程が実際に起こる過程であり，その確率を計算できる．電子の電荷の大きさの測定に対応する過程を考えよう．それは結局，全体として電子が光を一つ放出したり吸収したりする過程に対応する．そのような過程には，素過程を初めとして，図 5 のようなグラフがすべて寄与するので，それらを足す．この「足す」というところが，量子力学の本質である．ずっと過去とずっと未来を決めても，途中のところでは色々な過程が起こり得るので，それらの過程に対応したグラフ（確率振幅）をすべて足しあげ，最後に 2 乗する．

図 5 の右辺の初項は素過程であり，古典的な記

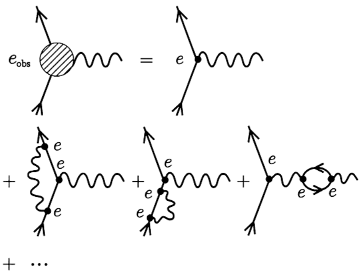


図 5　電荷測定の量子電気力学過程.

述に対応している．右辺 2 行目以降が量子補正と呼ばれる効果である．1940 年代に 2 行目のグラフを計算した朝永たちはその結果に驚いた．1 行目の素過程は単に e を与えるだけのことであるが，その後に続く 2 行目の e^3 に比例するグラフは係数が無限大（∞）になってしまったのである．

$$e_{\mathrm{obs}} = e - \infty \cdot e^3 + \cdots. \qquad (4)$$

これが量子電気力学が遭遇した無限大の困難の始まりであった．朝永たちは，くりこみ理論を建設してこの困難をしのいだ．

くりこみ理論の本質は，電子の持っている電荷に対応した 2 つの概念：理論を定義しているパラメタとしての電荷 e と実際に実験で観測される電荷 e_{obs} の 2 つを完全に「差別」することにある．素過程を決める電荷 e は直接観測することはできない．観測にかかるのは，あらゆる過程の和から計算される確率であり，それは図 5 の e_{obs} である．無限大の困難とは，e_{obs} を e の関数として計算したら無限大の係数が出てきたということに他ならない．それなら，観測できない e が実は有限な量ではないと思い直すことによって，e_{obs} を有限な値にしてしまえばよい，というわけである．これを「くりこみ」と呼ぶ．

これだけなら，くりこみ「理論」と呼ぶほどのことはない．物理理論のパラメタと観測量はいつでも一致するわけではない，というだけのことだ．話はこれだけでは済まない．問題は，あらゆる過程の確率が e_{obs} の関数として書き直したときに有限に計算されるかという点にあり，この証明は簡単ではない．後にこの証明が成立し，くりこみ理論が誕生した．

素過程の電荷 e のほうは「裸の電子」の「裸の電荷」と呼ばれる．これは，観測される電子は，いわばいろいろな過程によって着物を着て膨らんだような状態になっており，着物を着た電子と言われるのに対応している．くりこみ理論とは，垣間見てしまった裸の電子をあえて見ない振りをして，着物を着た電子のみを相手にしようという，良く言えば謙虚な大人の理論，悪く言えば煮え切らない理論であった[2,3]．

4．0 電荷問題

くりこみ理論と言えども，図 5 に登場するグラフをすべて一度に計算することはできない．当時は e^3 のグラフを計算しただけである．式 (4) の ∞ を正の定数と思えば，観測される電荷は小さくなると読めるが，それだけでは真空の比誘電率を議論するには心もとない．そこで，この無限個のグラフの中から比誘電率の計算に最も重要な項をよりだして，一部とは言え無限個のグラフの和を求める，という気の遠くなるような計算に挑戦して 1950 年代に成功したのがランダウである．

ランダウは，図 6 のグラフとその繰り返しだけを足せば，それで非常に良い近似になることを示した．繰り返しは等比級数の和の公式で済むので，計算するのはこのグラフだけである．これは，左から来た光が電子と陽電子の対になり，そして，電子と陽電子は対消滅して光に戻る，という過程である．光というのは振動する電場と磁場に他ならない．すると，この過程は真空中に電場や磁場があるとき，その影響で電子と陽電子の対が現れ

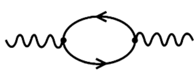


図 6　真空の仮想分極.

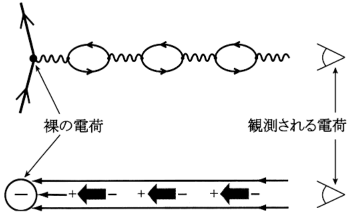


図 7　真空の仮想分極と誘電体の分極.

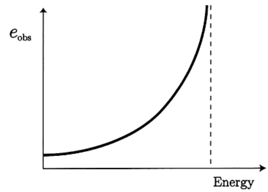


図 8　電子の電荷の変化.

てまた消える，という過程を表す．これはまさに真空という媒質の誘電分極ではないか（図 7）．実際，このグラフは歴史的に真空分極のグラフと呼ばれてきた．古典的な誘電体との違いは何か．それは，電子と陽電子はいわば仮想的に時間軸のある部分だけで存在しているということである．つまり，この分極は量子力学的な仮想分極である．仮想的ではあっても，分極による効果で，電子の持っている裸の電荷は外から見ると弱くなって見えるのである．真空もまた量子力学的な仮想分極によって，電場を弱め電子の電荷を遮蔽して弱くしてしまうのである．

さて，ランダウの計算結果に戻ろう．この真空分極の度合いは，対応する光の波長に依存し，波長が長いほど分極の度合いが大きいのである．この波長依存性は古典的な誘電体の場合にもあり，分散と呼ばれる現象である．分散のおかげで，プリズムは太陽からの白色光を虹の七色に分ける．

光のエネルギーと波長は逆比例の関係にある．ランダウの結果を量子電気力学流に言えば，観測される電子の電荷は，放出・吸収する光のエネルギーに応じてその大きさが変わる．光のエネルギーが低いほど仮想分極による遮蔽効果が大きくなるために，観測される電荷は小さくなる．その変化は図 8 のように計算された．横軸は対数軸で光のエネルギーを表したものである．

今，私たちが電子の電荷と思っている電荷は，ずっと遠くから波長の長い光を用いてゆっくり観測した場合の電荷に対応する．つまり，図 8 の一番左端である．電子にどんどん近づいて電子の電荷をすばやく測定すれば，観測される電荷は図の右側に移っていく．

このランダウの計算結果は，量子電気力学の本質的矛盾を露呈させた．観測される電荷は，図 8 の点線の所で発散してしまい，それっきりである．つまり，どんどん電子に近づいていくと，その電荷がどんどん大きくなってあるところで無限大になってしまい，そこから先が不明である．実際，その先では「ランダウの幽霊」が徘徊すると信じられている．これでは，森羅万象を説明するどころではない．これを逆に見ると，真空の仮想分極の効果で，離れるほど電場が弱くなるので，どんなに大きな裸の電荷を持つ電子を考えても，どんどん離れると観測される電荷はどんどん小さくなってしまい，遂には 0 になる，というわけである．これをもって「0 電荷問題」と呼ぶ[1]．実際の電子は，ちゃんと素電荷分の電荷を持っていることが観測できるのだから，これは全く困ったことだ．ランダウの提示した問題は，もともと場の理論が無限大の自由度を持つ量子論であるということに起因しているとも理解されるので，量子電気力学に固有の問題というよりは，場の理論という理論的な枠組み全体を否定したものと受けとめられ，素粒子を記述する理論としては全く別の理論が必要だとの見方が 1960 年代に広まった[3,4]．

5. クォークと漸近自由理論の発見

ランダウの結果は現在に至るも否定されていないし，むしろ完全に正しいと考えられている．実際，電子の質量エネルギーの 100 万倍もの高エネ

ルギーでの加速器実験では，電子の電荷が計算通り約 5%増大していることが確かめられている．それでは量子電気力学は間違っているのだろうか．そうではない．量子電気力学は，電子と光の相互作用を記述する理論として，あるミクロな領域で十分有効な（近似）理論なのである．実際，エネルギーを上げて電子に近づきながら観測していくと，電子の電荷は量子電気力学での計算通りに精密に増加していくのである．そして，素粒子の世界には電磁相互作用以外の相互作用も存在しているために，電子にどんどん近づいていくと他の相互作用の効果を無視できなくなり，その効果によって理論は矛盾から救われる（はずである）．超弦理論まで持ち出さなくてもよい．場の理論の中に，0 電荷問題を持たない理論が発見されたのである．

ランダウによって場の理論の基礎が揺らいだ頃，陽子やパイ中間子の仲間がたくさん実験的に見つかり，それらが基本的な素粒子とはとても思えない状況になった．そして，それらはすべて，より基本的な素粒子クォークからできているという仮説が作られた．しかし，どんな加速器を使って陽子を壊しても単体のクォークは出てこなかった．一方，陽子の中をどんどん細かに解像度を上げて見ていく実験では，そこには自由に動き回っている点状の粒子があると解釈される結果が出てきた．

点状粒子はいかにもクォークなのだが，するとクォークの相互作用は非常に奇妙なものになる．ミクロの領域で見ると自由，すなわち相互作用が弱いくせに，マクロの領域で単体で取り出そうとしても，とても出てこれないくらい相互作用が強い．つまり近づくと弱くなり遠ざかると強くなる．これはちょうど，これまで説明してきた電荷の分極遮蔽と全く逆である．分極遮蔽は物理的に極めて自然なので，それに反する非常識で不自然な「逆遮蔽」の理論があるとは誰も思わなかった．そのとばっちりで，クォークの提唱者も含め多くの人が，クォークは数学的な表現に過ぎず，物理的実体があるとは考えられないとまで述べていた[4]．

1970 年代に入って，逆遮蔽の性質を持つ場の理論，すなわち比誘電率が 1 より小さい理論，が遂に発見された．近づくと弱くなる，つまり漸近的な（高エネルギーの，ミクロの）領域で自由になるという意味で，それを漸近自由な理論と言う．この発見者たち，D.J. Gross, H.D. Politzer, F. Wilczek が 2004 年度のノーベル物理学賞を受賞した．漸近自由なクォークの理論は量子色力学（QCD）と呼ばれる．漸近自由な理論の発見は，クォークの実在性を誰にも疑いのないものにしただけでなく，場の理論による素粒子の記述がずっとミクロの極限まで意味があることを示した．更に，クォークの間の強い相互作用がミクロの領域でどんどん弱くなることによって，他のより弱い相互作用たちと統一的に理解できる可能性を開いた．

ランダウの 0 電荷問題は，単に理論の矛盾を指摘しただけではなかった．それは，相互作用の強さがミクロに行くにしたがって変化するという場の理論の持つ魅力的な性質を明らかにし，くりこみ群と呼ばれることになる新理論を生み出してくりこみ理論を煮え切らない理論から卒業させ，素粒子の統一理論への大道を敷いたのである．

参考文献と注釈

1) 今日では「量子電気力学は trivial（自明）である」と表現することが多い．つまり電荷が 0 になってしまうのだから相互作用がなくなり，自由な電子と光がすれ違うだけの自明な理論結果になる，という意味．
2) Introduction to the Non-perturbative Renormalization Group and Its Recent Applications, K-I. Aoki, *Int. J. Mod. Phys.* B **14** (2000) 1249–1326.
3) くりこみ理論についての拙著：歴史的に解説したものとして「くりこみ群と素粒子論」『数理物理への誘い 4』（荒木不二洋編）遊星社 (2002) 11–40. くりこみ理論とくりこみ群の本質について，「くりこみ理論入門」数理科学 **132** (1989) 34–39 及び，別冊・数理科学『場の物理と数理 —素粒子から物性まで—』(1991) 118–123. 非摂動的なくりこみ群については，「非摂動論的くりこみ群—素粒子の質量の謎に迫る—」数理科学 **406** (1997) 38–45 及び，別冊・数理科学『場の理論』(1999) 125–133. くりこみ群の量子力学への応用など，「有効ポテンシャル入門—ミクロからマクロまで—」数理科学 **467** (2002) 34–40.
4) Twenty five years of asymptotic freedom, D.J. Gross, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **74** (1999) 426–446 (hep-th/9809060). ノーベル賞前の宣伝があるにしても，当時の学会の状況を詳しく伝えていて面白い．

（あおき・けんいち，金沢大学理学部）

統計力学におけるゼロ

ゼロ点をとおしてみる相転移現象

田崎　晴明

1. 統計力学とはなにか

われわれのまわりのすべての物質は，原子や分子といった目に見えないミクロな要素からつくられている——これは，現代科学がもたらしたもっとも重要な知見だろう．さらに，これらミクロな要素たちの性質やふるまいは，われわれが慣れ親しんでいるマクロな対象の性質やふるまいとは本質的に異なっていることもわかっている．

そうなると，われわれが世界を本当の意味で理解するためには，質的に異なった**ミクロな世界とマクロな世界を論理的に結びつける**作業がどうしても必要になる．簡単に言ってしまえば，それを実行するのが統計力学である．マクロな知的存在がミクロな構造をもった世界に生きているかぎり，ぜったいに必要な科学の分野だと言っていい．

この解説では，統計力学の予備知識のほとんどない読者を想定して，「大分配関数のゼロ点」が相転移という興味深い物理現象とどのように関わってくるかをていねいに述べようと思う．ごく単純な（しかし，現実的な）ミクロなルールから，質的に異なったマクロなふるまいが生み出される様子を，もっとも簡単な例をとおして，味わっていただければ幸いだ[1]．

2. 相互作用のないモデル

話をはっきりさせるため，表面吸着という現象を例にとろう[*1)]．きれいに磨かれた固体の表面が圧力の低い気体と接している．固体の表面には，気体の分子がくっつくことのできる特別な場所——吸着サイトと呼ぶ——が周期的に並んでいる．（単純化しすぎだが）平らな板にくぼみが並んでいるタコ焼きの板のようなものを想像してもらっていいだろう．各々の吸着サイト（板のくぼみ）は，気体分子が一つくっついている状態，あるいは，何もついていない状態のどちらか一方をとる．

系全体の温度，気体の圧力が一定に保たれているとする．気体分子はランダムに運動しているので，あるとき，ポンと気体分子が吸着サイトに飛びこんできて，そのままくっついてしまうということがあるだろう．しかし，いったんくっついた気体分子も，固体の分子の振動に押されて，何かの拍子に吸着サイトからはずれて，外に飛び出していってしまうかもしれない．だから，温度・圧力が決まっていても，吸着サイトに気体分子がくっついているかどうかは決まらない．どれくらいの割合でくっついていそうかという確率だけが決まると考えるべきなのだ[*2)]．

そこで，ある吸着サイトに気体分子が吸着していない状態の重みを1とし，吸着している状態の重みを z としよう．z は正の実数で，当面は，モ

---

*1)　二状態をとる微小な要素が相互作用しあっている系なら本質的に同じ扱いができる．代表的な例は，スピン系，合金系，あるいは，スカラー φ^4 場の量子論の真空の構造．

*2)　このように，ランダムに運動する多くの粒子からなる系を確率のことばで扱うのが統計力学の重要な視点である．

デルを特徴づける唯一のパラメターである．現実の系では，z は系の温度と気体の圧力から決まる．重みが z 対 1 ということは，確率に焼き直せば，気体分子が吸着している確率が $z/(z+1)$，吸着していない確率が $1/(z+1)$ ということになる．

吸着サイトは全部で N 個あるとする．これらのうちの n 個の吸着サイトに気体分子がくっついているようなパターンを考えてみよう（もちろん，n は 0 以上 N 以下の整数）．このようなパターンの重みは，$N-n$ 個の空のサイトの重み 1 と n 個の吸着しているサイトの重み z をすべてかけあわせた z^n になる．これらの重みを，すべての吸着パターンについて足しあげた

$$Q_{1,N}(z) = \sum_{\text{すべての吸着パターン}} z^n \qquad (1)$$

は確率の規格化の定数である*3)．つまり，表面全体に n 個の気体分子が吸着しているようなある状態の出現する確率は，$z^n/Q_{1,N}(z)$ である．

N 個の吸着サイトから気体分子の吸着する n 個を選びだす場合の数が ${}_N C_n = N!/\{(N-n)!\,n!\}$ であることに注意すれば，(1) の和は，

$$Q_{1,N}(z) = \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n\, z^n = (z+1)^N \qquad (2)$$

というきれいな形になる．

ここで，この解説の主役である「大分配関数のゼロ点」に話をもっていこう．上の規格化定数 (2) を 0 に等しいとおいた

$$Q_{1,N}(z) = 0 \qquad (3)$$

を，z についての代数方程式とみなし，その解——これを $Q_{1,N}(z)$ のゼロ点とよぶ——を調べてみよう．(3) は $(z+1)^N = 0$ という方程式だから，その解は即座に求まって，たった一つの N 重根

$$z = -1 \qquad (4)$$

が得られる．もともと z は正の実数だったのだから，ゼロ点 (4) は本来の物理とはまったく無縁のところに位置している——今のところは．

*3) 統計力学の用語では大分配関数と呼ばれる．

3. 相互作用のあるモデル

上のモデルは，物理的にも数理的にも，ほぼ自明だ．ここに，気体分子の間の相互作用を取り入れると，話は一気におもしろく，非自明になる．

固体表面に吸着した気体分子の間には，互いに引き合うような力がはたらくとしよう．すると，気体分子たちが吸着する際，それぞれがバラバラにくっつくのでなく，ある程度まとまって吸着しようとする傾向が生まれる．この傾向を以下のようにモデルに取り入れる．

まず，「隣りあう二つの吸着サイトの一方に気体が吸着していて，もう一方には吸着していない」ようなサイトのペアーのことを，（あまりいい名前ではないが）「不本意なペアー」と名付けよう．不本意なペアーにはペナルティーを与えたい．固体表面の N 個のサイトへの吸着のパターンが決まれば，吸着している全分子数 n と，その中の不本意なペアーの数 b が決まる．そうしたら，この吸着パターンの重みを，$z^n\,\alpha^b$ であるとしよう*4)．ここで，α は，不本意なペアーへのペナルティを表す新しいパラメターである．不本意なペアーはあまり出現してほしくないわけだから，α は $0 \le \alpha \le 1$ を満たすということにしよう．

話がややこしくなってきたので，簡単な具体例をみながら整理しておこう．図 1 (a) に九つの吸着サイトが並んだ表面を描いた（もちろん実際の N は 9 などよりはるかに大きくとる）．図 1 (b) はここに三つの気体分子が吸着したパターンの一例である．このパターンの重みは $z^3\,\alpha^5$ になる．

ここでも，(2) と同様に，2^N とおりのすべての吸着のパターンの重みを足しあげたものを

$$Q_{\alpha,N}(z) := \sum_{\text{すべての吸着パターン}} z^n\,\alpha^b \qquad (5)$$

と定義する．ここで和の中に登場する n, b は，決

*4) 統計力学をご存知の方のための注：隣り合う吸着サイトの両方に分子が吸着しているようなパターンに 1 より大きい重みを与えるほうが自然だが，それはちょっとしたパラメターの書き換えで，今のやり方と同じになる．ここでは系の対称性を保つような重みの選び方をした．

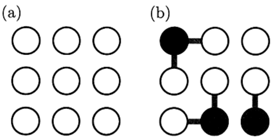


図 1　(a) $N = 9$ 個の吸着サイトが並んだ表面．ここに気体分子が吸着するパターンは，全部で $2^9 = 512$ とおりある．(b) 灰色にぬった三つのサイトに気体分子が吸着したパターン．灰色の線で結んだ「不本意なペアー」は全部で五つある．よってこの状態の重みは $z^3\,\alpha^5$ ということになる．

まった数ではなく，吸着パターンを一つ決めればそれに応じて決まる数（図 1 を参照）であることに注意．α が 1 でないかぎり，和にきれいな性質はなく，(2) のように簡単な形にまとまるということはない*5)．

さて，$z^n\,\alpha^b$ はある吸着パターンが出現する重みであり，$Q_{\alpha,N}(z)$ はその総和だった．よって，後者で前者をわった $z^n\,\alpha^b/Q_{\alpha,N}(z)$ は，吸着分子数が n で不本意なペアー数が b であるような一つの吸着パターンが出現する確率に他ならない*6)．この事実から，表面全体に吸着している気体分子数の期待値（平均値）が，

$$\begin{aligned}\bar{n}_{\alpha,N}(z) &:= \sum_{\text{すべての吸着パターン}} n\,\frac{z^n\,\alpha^b}{Q_{\alpha,N}(z)} \\ &= \frac{1}{Q_{\alpha,N}(z)}\,z\,\frac{\partial}{\partial z}Q_{\alpha,N}(z) \\ &= z\,\frac{\partial}{\partial z}\log Q_{\alpha,N}(z) \qquad (6)\end{aligned}$$

と書けることがわかる．一行目は確率における期待値の定義そのまま*7)，一行目から二行目への移行はちょっと意外だが，逆に二行目に定義 (5) を代入してすなおに（実変数 z についての）微分を計算すれば一行目が得られる．二行目から三行目は，対数関数の微分と合成関数の微分の練習問題だ．

ここで，表面全体に吸着した気体分子の密度を

$$\rho_{\alpha,N}(z) := \frac{\bar{n}_{\alpha,N}(z)}{N} \qquad (7)$$

とし，また「自由エネルギー」を

$$\psi_{\alpha,N}(z) := \frac{1}{N}\log Q_{\alpha,N}(z) \qquad (8)$$

と定義すれば，(6) より，両者の間には

$$\rho_{\alpha,N}(z) = z\frac{\partial}{\partial z}\psi_{\alpha,N}(z) \qquad (9)$$

という関係が成り立つ．左辺の密度 $\rho_{\alpha,N}(z)$ は（たとえば実験でも測定できる）重要な物理量であり，それが重みの和 $Q_{\alpha,N}(z)$ の対数をとった $\psi_{\alpha,N}(z)$ で表現できるのである．

相互作用のない $\alpha = 1$ のときには，(2) より $\psi_{1,N}(z) = \log(z+1)$ である．よって，(9) にしたがってこれを微分すれば，

$$\rho_{1,N}(z) = z\frac{\partial\log(z+1)}{\partial z} = \frac{z}{z+1} \qquad (10)$$

のように吸着分子の密度が求められる．もちろん，これは（一つのサイトに分子が吸着する確率が $z/(z+1)$ ということから）すでに知っていた結果である．

4. $Q_{\alpha,N}(z)$ のゼロ点

こうして，重みの和 $Q_{\alpha,N}(z)$ が重要そうだとわかってきたところで，(3) でやったように，

$$Q_{\alpha,N}(z) = 0 \qquad (11)$$

という z についての方程式の解——つまり $Q_{\alpha,N}(z)$ のゼロ点——を吟味してみよう．今度は (4) のようにあっさりと根が求まったりはしない．

そこで，相互作用の効果が効いてくる最小の問題である $N = 2$ の系について，重みの和 $Q_{\alpha,2}(z)$ を具体的に求めてみよう．この系の四つの吸着のパターンを図 2 に列挙した．これらのパターンに

*5)　(5) が今ひとつ理解しきれない読者は，いったん (12) の具体例の導出を見てなっとくしてから，この先を読み進めるといいだろう．

*6)　四つのパターンの出現する重みが，3, 4, 1, 8 なら，二つ目のパターンが出現する確率は $4/(3+4+1+8)$ という計算と同じことをやっている．

*7)　サイコロをふって，偶数の目がでれば 10 円もらえて，奇数の目がでれば 100 円もらえるなら，（すべての目のでる確率が等しく 1/6 だとして）もらえるお金の期待値は，$10/6 + 100/6 + 10/6 + 100/6 + 10/6 + 100/6$ というのは簡単だろう．これと同じ計算だ．

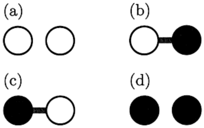


図2　$N=2$ の系の四つの吸着のパターン（図の意味については図1の説明をみよ）．ここから $Q_{\alpha,2}(z)$ のゼロ点を求めると，実に面白い性質が見えてくる．

対応する重みは，(a) $z^0\alpha^0=1$, (b) $z^1\alpha^1=z\alpha$, (c) $z^1\alpha^1=z\alpha$, (d) $z^2\alpha^0=z^2$ なので，足しあげれば

$$Q_{\alpha,2}(z)=z^2+2\alpha z+1 \qquad (12)$$

となる．よって $Q_{\alpha,2}(z)=0$ は二次方程式になる．その根は

$$z=-\alpha\pm i\sqrt{1-\alpha^2} \qquad (13)$$

であり，$\alpha=1$ 以外では実数ではない．z が物理的な意味をもつのは，あくまで正の実数の範囲だから，これらゼロ点に物理的な意味はなさそうだ．

ただ，ゼロ点 (13) の α 依存性を調べると，次の二つのきわめて面白い事実がわかる．

1. ゼロ点 (13) は任意の $0\le\alpha\le1$ について $|z|=1$ を満たす．

2. 相互作用のない $\alpha=1$ ではゼロ点 (13) は $z=-1$ で重根になっているが，相互作用が強くなる（つまり α が小さくなる）と複素平面の円周上を，じわじわと z（の実部）が正の方向にむかって動いていく．

この $N=2$ の系では，「じわじわと動いて」も，$\alpha=0$ でようやく $z=\pm i$ となって，虚軸までしか届かない．しかし，吸着サイトの個数が増えてくると，ゼロ点はより広い範囲を動くようになるのだ．これ以上の大きさになると手計算はできなくなるので，まずは数値計算の結果をみよう．図1の九つの吸着サイトの並んだ系を考える．512とおりの状態すべてについて n と b を求め，重み

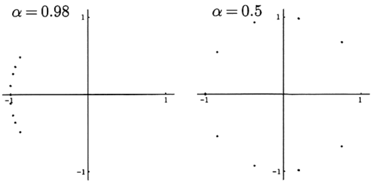


図3　$Q_{\alpha,9}(z)$ の九つのゼロ点．$\alpha=0.98$ のときと $\alpha=0.5$ のときの数値計算の結果を複素平面に図示した．$\alpha=1$ では $z=-1$ にかたまっていたゼロ点が，α が小さくなるにつれ，単位円周上を動きながら，実軸を「目指して」広がっていくように見える．

$z^n\alpha^b$ を足しあげて*8)得られる $Q_{\alpha,9}(z)$ は z の9次式である．$Q_{\alpha,9}(z)=0$ という9次方程式を数値的に解いて，解を複素平面上にプロットしたのが図3だ．やはり**ゼロ点は複素平面の単位円周上に並んでいて，相互作用が強くなると，z の実部が正の領域に入り込み実軸に近づいていく．**ゼロ点に，物理的な意味での「出番」が訪れるかもしれない．

5. Lee–Yang の定理と相転移

ここまで見てきたことをふまえて，この系について何が数学的に証明されているかを見ていこう．

まず，ゼロ点が複素平面の単位円周上に並んでいるという性質は，一般の状況で厳密に成り立つ．

定理1（Lee–Yang の定理） 任意の N と*9) $0\le\alpha\le1$ を満たす任意の α について，$Q_{\alpha,N}(z)=0$ の解（つまり，ゼロ点）は $|z|=1$ を満たす．

z を複素変数とみて，$|z|\neq1$ であるとする．$Q_{\alpha,N}(z)$ は z の N 次の多項式だから，もちろん z について解析的である．さらに，Lee–Yang の定理から $Q_{\alpha,N}(z)\neq0$ が保証されるから，対

*8)　もちろん，コンピューターにやってもらう．MATHEMATICA でプログラムすれば，パソコン上ですぐに計算できる．

*9)　単に吸着サイト数 N が任意なだけでなく，吸着サイトの並び方も任意である．

数をとることができて $\log Q_{\alpha,N}(z)$ も z について解析的[*10)]．よって，(8) で定義した $\psi_{\alpha,N}(z)$ も z について解析的だとわかる．

この事実と解析関数の極限についてのいくつかの性質を用いると，次の定理（の後半）が証明される．なお，これから先では吸着サイトが $L\times L$ の正方形状に並んでいる（つまり $N=L^2$）場合にかぎって話を進める．

定理 2（面積無限大の極限） 任意の正の実数 z と任意の $0\le\alpha\le 1$ について,「自由エネルギー」(8) の面積無限大の極限

$$\psi_\alpha(z) := \lim_{N\to\infty} \psi_{\alpha,N}(z) \qquad (14)$$

が存在する[*11)]．さらに，$z\neq 1$ においては，関数 $\psi_\alpha(z)$ は z について解析的である．

$z=1$ という特別な値をのぞけば，z が正の実数の範囲を動くとき「自由エネルギー」$\psi_\alpha(z)$ には，なに一つ「変なこと」はおきない，という定理である．いかにも「変なこと」を引き起こしそうなゼロ点たちが，$|z|=1$ という円周上に閉じこめられていて，そこから離れた場所には「悪さ」ができないからだと考えればなっとくできる．

それでは，ゼロ点たちがせまってくる $z=1$ という特別なところでは，何か「変な」ことがおきるのだろうか？ 銀表面へのアルゴン分子の吸着系[*12)]での実際の実験結果のグラフをお見せしよう（図 4）．温度を徐々に下げていったとき，密度がポンと跳んでいるところがあるのがわかる．密度の薄い相から濃い相に不連続に変化する相転移現象である．密度 $\rho_\alpha(z)$ が不連続関数になるのだから，$\psi_\alpha(z)$ は解析的にはなり得ない．

---

*10) ここを理解するには複素関数の知識がいる．ただ，高校数学の知識でも $\log 0$ が「やばそうだ」ということはわかるだろうから，それを念頭に置いて読み進めてもらえればよい．

*11) 面積無限大の極限の存在証明はゼロ点とは無関係におこなうことができる．

*12) 細かい注：銀表面のアルゴン吸着系は，吸着サイトが確定しない物理吸着系なので，これまで説明してきたモデルとは微妙に異なっている．しかし，相転移の様子は本質的には同じである．

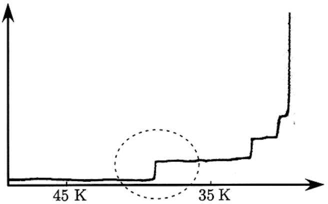


図 4　銀 111 表面にアルゴン分子が吸着した系の実験結果．グラフの縦軸は吸着したアルゴン分子の密度を反映する量（ただし，正確に密度に比例するわけではない），横軸は銀表面の温度．アルゴン気体の圧力は 2.9×10^{-5} Pa 点線で囲った部分で，密度が不連続に変化する相転移現象が見られる．その先にも不思議な現象が見えていて面白いのだが，それはまた別の機会に（グラフは学習院大学荒川研究室提供）．

この実験結果に対応する数学の定理もある*13)．

定理 3（相転移の存在）　α が十分に小さいとき，（実変数 z の）関数 $\psi_\alpha(z)$ は $z = 1$ において微分不可能になる．これにともなって，面積無限大の極限での密度 $\rho_\alpha(z) = \lim_{N\to\infty} \rho_{\alpha,N}(z)$ は $z = 1$ で不連続に変化する．

(5) のような単純な重みで定義された系で，このような特異なふるまいが生じるのは驚くべきことである．

ゼロ点のふるまいを考えれば，この特異性は理解できる．吸着サイト N 個の系では，$Q_{\alpha,N}(z)$ のゼロ点は N 個ある．これらがすべて複素平面の単位円周上に並んでいて，α が小さくなるにつれ，実軸を目指して広がっていくのだ（図 3 を見よ）．有限の N の系でゼロ点が実軸に触れることはないが*14)，実軸の非常に近くに，膨大な数のゼロ点が並ぶことは可能である．ゼロ点においては（複素変数 z についての）関数 $\log Q_{\alpha,N}(z)$ は特異的だから，それが $N \to \infty$ では $z = 1$ における特異性を生み出しうるのである．平たくいえば，**マクロの極限 $N \to \infty$ で無数のゼロ点が $z = 1$ に「押し寄せ」それが，$\psi_\alpha(z)$ の微分不可能性，密度 $\rho_\alpha(z)$ の不連続性を生み出すのだ．**

物理とは一見無関係な複素平面上のゼロ点たちが，じわじわと「物理的に意味のある」実軸を目指して動き，ついには，実験的にも観測されている相転移現象を引き起こす――数理と物理がゼロを介して不思議に交錯する魅力的なシナリオではないか．

*13)　この定理の証明はゼロ点とは無関係な方法で行う．説明の便宜上，実験と定理の設定を微妙に変えたが，（定理のように）z を変える実験をしても相転移があるし，（実験のように）温度を変えても相転移の存在定理は証明できる．

*14)　定義 (5) より明らかに $Q_{\alpha,N}(1) > 0$ である．

参考文献

1)　背景については，ほとんどの統計力学の教科書で学ぶことができるが，残念ながら今のところおすすめできる教科書がない．相転移，臨界現象の物理的背景については，近く出版される西森秀稔『相転移と臨界現象の統計物理』（培風館，新物理学シリーズ），数学的な結果については，やはり近く出版される田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版）を参照されたい．

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

偶然と確率
0が生み出す事象



渡辺　浩

1. 偶然ということ

19世紀末，古典物理学が完成すると同時にその体系のほころびが見え，微視的世界の力学法則として量子論が生まれた．この歴史劇と状況は異なるが，現代の自然科学もある困難な問題を抱えている．それはいわば“内的なパラドックス”である．

まず，時間の矢の問題．古典論と量子論の基本的な運動方程式において，時間は過去と未来について対称的になっている．しかしこれは，熱現象において過去と未来が明確に区別されるという経験事実と矛盾する．熱現象は，途方もない数の原子や分子が微視的なスケールで行う乱雑な運動に由来する巨視的な現象である．

第2に，因果律の破れの問題．古典論と量子論の基本的な運動方程式は，初期条件を与えると解が一意的に定まるという性質がある．しかし量子論において波動関数は確率の波を表すと解釈されており，量子系が観測装置のような巨視的な系と相互作用するとき，相互作用後の状態を確定的に予言することはできない．それでは，量子系と巨視的な系の相互作用を量子論の問題として扱ったらどうなるのか．巨視的な系との相互作用において因果律は破れるのだが，系全体を量子系と見なすなら因果律を満たさなければならない．因果律に従う量子論がどうして因果律を破れるのだろうか[*1]．

*1)　これに相当する問題は実は古典論の運動方程式にもある．

第3に，生物の合目的性の問題．自然科学は本来客観性を身上としており，自然が“目的”をもって存在しているという解釈を徹底的に排除してきた．自然科学としての生物学もまたそうあるべきだろう．しかし，生物の行動を客観的に見たとき，生物が何らかの目的をもっていることを認めざるを得ない．モノーは「したがってそこには，すくなくとも外見上，深刻な認識論上の矛盾がある」と言う[1]．そしてこの問題の先には，高等動物の「意識」や「自由意志」というパラドキシカルな概念が待ち受けていて，時間の矢や因果律の問題に絡んでくる．

この小文でこれらのパラドックスについて論じようというわけではないのだが，自然科学的な認識には，その根底において，自然の確率的な性格が絡んでいるということを指摘したいのである．自然のあり方を精密に理解したいという人の願望は，厳密に因果律に従う決定論的な理論体系を編み出した．しかし，この理論体系の中に矛盾のない形で，「偶然」という自然のメカニズムをとり入れることにまだ成功していない．

また「偶然」は，生命現象においても本質的な役割を果たしている．生物進化における遺伝子の突然変異の重要性について改めて強調する必要はないだろうが，合目的性と偶然性も無縁とは言えないように思われる．というのは，生物が文字どおりの自然法則の奴隷ではなく，何らかの選択の自由をもてたからこそ，偶然よい選択をした生物

が合目的的な装置を創造する結果になったと思われるからである．ここで,「よい選択」は必然的になされるのではなく，偶然なされるとしなければならない*2)．この議論は甚だ粗雑ではある．しかし，極めて多様で内容豊かな自然の起源を理解する上で，偶然という概念が不可欠であることは間違いないだろう．

それでは「偶然」とは何か．ポアンカレは次のように言っている[2)]．

> われわれの眼をかすめるようなきわめて小さな原因が，無視できないほど大きな効果を生むことがある．このとき，その効果は偶然に起こったと言われる．

つまり「偶然」は，観測できないほど微弱なノイズ，ある意味で「0」が生み出す事象である．

2. 雪崩のモデル

偶然が引き起こす現象の例として，雪崩の簡単なモデルを取り上げよう*3)．

斜面に積もった雪を吸着しながら雪玉が斜面を転がっている．斜面の仰角を θ とし，雪玉が吸着する斜面上の雪の量を単位長さ当たり μ（定数）とする．時刻 t における雪玉の質量を m，速度を v とすれば，単位時間当たりの雪玉の運動量の増加は，雪玉が受ける斜面方向の重力の大きさに等しいので

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg\sin\theta.$$

また，単位時間当たりの雪玉の質量の増加は，単位時間あたりに吸着する雪の量に等しいから

$$\frac{d}{dt}m = \mu v$$

が成り立つ．g は重力の加速度である．

さて，この微分方程式を解くのは簡単だが，おもしろいことに，初期条件

$$m(0) = 0\ ,\quad v(0) = 0$$

を満たす解として，自明な解 $m(t) = 0, v(t) = 0$ のほかに，自明でない解

$$m = \frac{1}{6}\mu g\sin\theta\cdot t^2,$$
$$v = \frac{1}{3}g\sin\theta\cdot t$$

が存在する．即ち，初期値問題の解の一意性が成り立たない，言い換えれば，因果律が破れているということである．ポアンカレの言葉を借用すれば，何らかの原因で「われわれの眼をかすめるようなきわめて小さな」雪玉が作られると，その後は必然的に「無視できないほどの大きさ」に成長すると言える．

さらにこの微分方程式には，上に挙げた2つの解のほかに，任意の時刻 $t_0 > 0$ まで $m = 0, v = 0$ のまま来て，t_0 から成長し始めるという解もある．ここで，雪崩が発生する時刻 t_0 は任意パラメータであり．力学的に決定される量ではないので，雪崩がいつ起きるかを予測することはできない．これは，雪崩の発生に偶然が関与しているという事実の現れである．

3. 偶然性と確率論

偶然が関与する現象，即ちノイズに極めて鋭敏な現象は，日常生活の中でもしばしば目にする．私たちの生活そのものがそうだとも言えるが，サイコロを投げてどの目が出るかということを考えてみよう．

サイコロの運動は古典力学に従っていると見て，いろいろな初期条件を与えてコンピューターで数値的に運動を追跡してみたらどうだろうか．しかしサイコロの運動がノイズに鋭敏であるということは，解の計算過程は計算誤差に鋭敏であるということだから，計算の誤差はその後の計算過程において急速に増幅されるだろう．したがって，数値的なシミュレーションによる予言の精度には限界がある．

また，思い切って問題を単純化して，サイコロの

*2) 必然的な選択は選択ではないし，よい選択を促す超越的な力を仮定すべきではない．

*3) この例題は平尾淳一先生に教えていただいた．

1から6までの目は等確率で出るとするのはどうだろうか．確かに確率モデルは実用的である．しかしこの場合，確率論という一種の現象論が基本法則とどのようにつながっているかを明らかにする必要がある．また本当に等確率かという問題も検討しなければならない．

一般に，ノイズに極めて鋭敏な現象を微分方程式のような決定論的な数学的装置で扱おうとすると，たとえば解の一意性が成立しなかったり，あるいは解が初期条件に鋭敏すぎて望ましい定理が成立しないなど，何らかの形で困難に遭遇するだろう．それでは確率論的なアプローチはどうかというと，すでに述べたように，2つの重大な問題がある．

1. 決定論と確率論の折り合いをどうつけるか
2. 適切な確率モデルをどう選ぶか

理論物理の歴史は，これらの問題を解決する方向に動いてきたと見てよいが，これらは冒頭のパラドックスに関係しており，現時点で解決されていない．しかし，第2の問題において，「熱平衡状態」と呼ばれる特殊な物理系については，確率モデルの選び方が確立している．次に熱平衡状態の確率モデルに触れよう．

4. 熱平衡状態

極めて多数の原子や分子からなる系 Σ が，さらに大きな環境の中に置かれているとする．さて，部屋の中でコーヒーが次第に冷めていくように，系 Σ を環境の中に長時間放置した結果，巨視的にはまったく変化しないように見える状態に落ちついたとしよう．このような状態を「熱平衡状態」と言う．熱平衡状態にある系の物理は，微視的な詳細を問おうとしない限り，系 Σ の体積 V，圧力 p，全エネルギー E，温度 T のような巨視的なパラメータだけで議論することができると考えられている．(1モルの) 理想気体の状態方程式 $pV = RT$ は，その典型である．

系 Σ は熱平衡状態にあるとは言え，もしもその微視的な詳細が目に入るなら，激しく乱雑に運動している原子たちを見るだろう*4)．このような微視的状態を完全に記述するには膨大な数の変数が必要である．ちょっと抽象的になるが，この完全な変数の組を X と書こう．X は時間とともに大変複雑に変化している*5)．ある時刻における X が分かれば，そのときの系 Σ の巨視的なパラメータの値も決まる．たとえば，Σ のエネルギー E は X の関数として $E(X)$ と書ける．

さて，系の時間変化に関して確率論的アプローチを取るということは，X が運動法則に従って変化しているという見方を捨てて，何らかの確率分布に従ってランダムな値をとると見なすことを意味する．問題はこの確率分布の定め方であるが，統計物理学では，X の確率分布（密度）は

$$\frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{E(X)}{kT}\right)$$

で与えられると主張する．ただし，T は環境の温度*6)，k はボルツマン定数，Z は全確率を1にするための規格化定数である．この分布をカノニカル分布と言う．カノニカル分布の理論は様々な系に適用され，実験結果をよく説明することが確かめられている．

5. 磁性体のモデル

鉄やニッケルなどの物質は，各原子が小さな磁石になっており，近隣の原子同士が互いに同じ方向を向こうとする相互作用をしている．この磁性体を温度 T の室内に放置し，十分時間が経って熱平衡状態に達したとする．カノニカル分布の一例として，このような磁性体の状態を記述する確率モデルを与えよう．

まず，d 次元ユークリッド空間の格子点全体

$$\mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_k \in \mathbb{Z}\}$$

*4) このような目をもった仮想的な知性をラプラスのデーモンと言う．

*5) X の時間変化が力学の法則に従っていることをラプラスのデーモンは知っている．

*6) 系 Σ は環境と熱平衡状態にあるので，T は系 Σ の温度でもある．

の有限部分集合 Λ（直方体の内部など）を考え，原子は Λ の各点に位置しているとする．d の "現実の値" は 3 だが，ここでは一般化して 1 以上の整数としておく．そして Λ の各点 x に ± 1 の値を取る確率変数 $\varphi(x)$ を置く．現実の磁石では，各原子が 3 次元空間のいろいろな方向を向くので，$\varphi(x)$ は（大きさが一定で）方向がランダムに変わる 3 次元のベクトルになると考えられるが，ここでは思い切って単純化して，$\varphi(x) = \pm 1$ としておく．この $\varphi(x), x \in \Lambda$, を全部集めたものを φ と書こう．φ は前節で「完全な変数の組 X」と書いたものに相当し，その変域は $\{\pm 1\}^{\Lambda}$ である．

次にこの磁性体のエネルギーを定めよう．近隣の原子が同じ方向を向こうとしていることを考慮して，

$$E_{\Lambda}(\varphi) = -\frac{1}{2} J \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y\in\Lambda}} \varphi(x)\varphi(y)$$

とおく．右辺の和は，隣同士に位置する $x, y \in \Lambda$ の組全体にわたるが，この和の中にどのペアも 1 回ずつ出てくるように 2 で割ってある．また J は正の定数である．J が正であるということは，隣同士の原子が同じ方向を向くとエネルギーが下がることを意味する．この系に対する温度 T のカノニカル分布は

$$\frac{1}{Z_{\Lambda}} \exp\left(-\frac{E_{\Lambda}(\varphi)}{kT}\right), \quad \varphi \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$$

で与えられる[3]．ただし，

$$Z_{\Lambda} = \sum_{\varphi\in\{\pm 1\}^{\Lambda}} \exp\left(-\frac{E_{\Lambda}(\varphi)}{kT}\right)$$

である．そして，φ の関数 $F(\varphi)$ に対し，その期待値を $\langle F(\varphi)\rangle_{\Lambda}$ と書く．即ち，

$$\langle F(\varphi)\rangle_{\Lambda} = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \sum_{\varphi\in\{\pm 1\}^{\Lambda}} \exp\left(-\frac{E_{\Lambda}(\varphi)}{kT}\right) F(\varphi).$$

さて，いま定義した磁性体の確率モデルと前節の話のつながりを確認しておこう．本来は磁性体を力学の基本法則に則って論じるべきなのだが，磁性体を構成する原子の数が膨大なので，それは事実上不可能である．しかし，定まった温度をもつ環境の中で熱平衡状態に達した磁性体は，カノニカル分布という確率分布に従う（とされている）．そこで，磁性体のエネルギー $E_{\Lambda}(\varphi)$ を用いてカノニカル分布を定義したのである．

このモデルにおいて，$\varphi(x)$ が ± 1 の値だけを取るという設定や相互作用に関する仮定は，言うまでもなく写実的に正確なものではなく，状況をかなり理想化し単純化している．にもかかわらず，このモデルは相転移と呼ばれる磁性体の特徴を説明することができる．数学的に厳密な解析は大変込み入っているので，直観的に分かりやすい大まかな議論を次に紹介しよう．

6. 相転移

1 つの格子点 $x_0 \in \Lambda$ を選び，確率変数 $\varphi(x_0)$ の期待値 $\langle \varphi(x_0)\rangle_{\Lambda}$ を考える．すべての $\varphi(x)$ を $-\varphi(x)$ で置き換えたとき，$E_{\Lambda}(\varphi)$ は不変であるから，この対称性により

$$\langle \varphi(x_0)\rangle_{\Lambda} = 0$$

である．そこで対称性を破るために，エネルギーの表式を

$$E_{\Lambda,h}(\varphi) = -\frac{1}{2} J \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y\in\Lambda}} \varphi(x)\varphi(y) - h \sum_{x\in\Lambda} \varphi(x)$$

のように修正し，期待値を

$$\langle F(\varphi)\rangle_{\Lambda,h} = \frac{1}{Z_{\Lambda,h}} \sum_{\varphi\in\{\pm 1\}^{\Lambda}} \exp\left(-\frac{E_{\Lambda,h}(\varphi)}{kT}\right) F(\varphi)$$

と書く*7)．$Z_{\Lambda,h}$ は対応する規格化定数である．$h > 0$ にとれば，$\varphi(x) = -1$ より $\varphi(x) = 1$ のほうがエネルギーが下がるので，$\varphi(x) = 1$ のほうが確率的に起きやすくなり，

$$\langle \varphi(x_0)\rangle_{\Lambda,h} > 0$$

となるだろう*8)．しかしこのように人工的に対称性を破ってもおもしろくはない．実際，$\langle \varphi(x_0)\rangle_{\Lambda,h}$

*7) 物理的には外部から磁場をかけることに相当する．

*8) 厳密な証明も難しくはないが，少し準備がいる．

は h の連続関数であるから，h を 0 にもって行けば，

$$\lim_{h\to+0}\langle\varphi(x_0)\rangle_{\Lambda,h}=0$$

となってしまう．

このモデルの重要な点は，Λ を格子点全体 $\mathbb{Z}^d$ に広げる極限において，“自発的に” 対称性が破れるというところにある．現実の物質は膨大な数の原子から成り立っているので，有限集合 Λ を無限集合 $\mathbb{Z}^d$ で置き換えるという理想化は当を得ている．以下において，$d\geq 2$ なる系に対して，この現象を説明するための「平均場理論」と呼ばれる直観的な議論を紹介しよう[4)]．

一つの格子点 $x_0\in\Lambda=\mathbb{Z}^d$ を選ぶ．$\varphi(x_0)$ は自身の値を決めるとき，隣に位置する $2d$ 個の $\varphi(x)$ に影響される．ここで，磁性体全体の “平均的な” $\varphi(x)$ の値を m として，隣に位置する $2d$ 個の $\varphi(x)$ を m で置き換えてしまう．すると，

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(x_0)\rangle_{\mathbb{Z}^d,h}\\ &\fallingdotseq\frac{1}{2}\sum_{\varphi(x_0)=\pm1}\exp(2d\beta m\varphi(x_0)+h\varphi(x_0))\\ &=\tanh(2d\beta m+h)\end{aligned}$$

となる．ただし $\beta=\frac{J}{kT}$ である．そして今度は，いま求めた値が磁性体全体の平均的な $\varphi(x)$ の値を決めると考えて，

$$m_{k+1}=\tanh(2d\beta m_k+h)\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

という漸化式を立てる．これは，大勢の人々がそれぞれ隣人の意見を参考にしながら自分の考えを決めようとしている状況で，各個人は隣人の意見を通して（仮想的な）「民意」の影響を受けるという考え方にたとえられるだろう．この漸化式は，民意の影響を受けて作られた個人の考えが，新たな民意となるというプロセスを表現している[*9)]．

さて，初期値 $m_0=0$ に対する上記の漸化式の解を考え，

$$m(h)=\lim_{k\to\infty}m_k$$

とおく．$m(h)$ は方程式

$$m(h)=\tanh(2d\beta m(h)+h)$$

の解である（$h>0$ なら正の解，$h<0$ なら負の解である）．そして本当の期待値 $\langle\varphi(x_0)\rangle_{\mathbb{Z}^d,h}$ は $m(h)$ で近似されると考えよう．

ここでさらに，h を 0 にもって行く極限をとる．

$$m_\pm=\lim_{h\to\pm0}m(h).$$

このとき，次のことが成り立つ．

$$m_\pm=0\ ,\quad 2d\beta\leq 1,$$
$$\pm m_\pm>0\ ,\quad 2d\beta>1.$$

即ち，環境が十分低温なら（β が大きいと）$m_\pm\neq 0$ となり，磁性体は永久磁石になることが分かる．ここで，0 でない $m_\pm$ を発生させる原因は，観測にかからないほど小さい h であり，$h>0$ に反応すれば磁性体は $\varphi(x)>0$ の方向に揃い，$h<0$ に反応すれば $\varphi(x)<0$ の方向に揃う．どちらに反応するかは偶然に支配されている．この現象を「自発的対称性の破れ」と言い，特定の温度においてこのように物理的状態（相）が質的に変化することを「相転移」と言う．

自発的対称性の破れ，ないし相転移は，無限自由度をもつ系に特有の現象であり，限りなく 0 に近い揺らぎを捉えて大きな秩序にまで成長させる無限自由度の機構がその背景にある．この機構は，統計物理学ばかりでなく素粒子論においても重要な意味をもっている．

*9) $d=1$ のときはこの議論は成立しない．なぜなら，$d=1$ のとき原子は 1 列に並んでいるので，無限につながった原子たちの民意は，1 個の原子の気まぐれによって遮蔽されてしまうからである．

参考文献

1) J.L. モノー『偶然と必然』渡辺格，村上光彦訳（みすず書房）．
2) H. ポアンカレ『科学と方法』吉田洋一訳（岩波文庫）．ただし引用した訳文は，D. ルエール『偶然とカオス』青木薫訳（岩波書店）による．
3) この特集に収められている田崎先生の論説『統計力学におけるゼロ』で，類似のモデルが別の観点から取り上げられている．
4) 厳密な議論については，田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版）（近刊）を参照されたい．

（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）

相対論における 0



平尾　淳一

1. 0 の意味するもの

物理において 0 は，程度の差こそあるものの，不変性・対称性・調和といった概念と結びついているように感じられる．

古代の天文学者たちは，惑星の一見複雑に見える運動を一様な円運動の組み合わせで理解しようと試みた．ところが，火星の精密な位置観測データを解析したケプラーが見出したのは楕円軌道であった．離心率だけを取り上げるならば $e=0$ の軌道から $e\neq 0$ の軌道へ，調和を追求する立場からは一歩後退を意味することになろう．しかし，この発見はニュートン力学という新たな自然理解のステージへの扉を開いたのであり，そこで科学者たちは新たな 0 と出会うことになる．

本稿では，力学や相対論において 0 がいかに取り上げられ，検証されてきたかを紹介しよう．

2. 重力の法則

ニュートンによれば，物体間に働く重力 F はその間の距離 r の逆 2 乗に比例する（逆 2 乗則）．

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$

天体スケールでの逆 2 乗則はよく確かめられている．一方，実験室スケールでの逆 2 乗則も，微弱な重力を扱う注意深い実験の結果，数% のレベルで検証がなされている．

逆 2 乗則は，質量 $m=0$ の仮想粒子によって伝えられると説明されるが，仮想粒子の質量が有限であるとき力のポテンシャル U は

$$U \propto \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

と表され，力の到達距離は有限になる．

適当な λ に対してポテンシャルが

$$U = -\frac{GMm}{r}\left(1+\alpha e^{-r/\lambda}\right)$$

のように表されるとすると，天体スケール（$|r|\gg\lambda$）での「重力定数」G と実験室スケール（$|r|\ll\lambda$）における「重力定数」$G'=(1+\alpha)G$ に違いが生じることになる．天体観測による検証においては，天体の質量は不明であるから，G と G' に多少差があってもこれまでの実験や観測とは矛盾しないのである．そこで，ニュートンポテンシャルに対するこの付加的な項の存在を確かめるために，地下深い坑道などで重力測定実験が行われ，様々な λ に対して実験観測的に許される α の上限が与えられている．それによると今のところ $\alpha\neq 0$ とする観測的な根拠はなさそうである．

逆 2 乗則が破れていると惑星の軌道が閉じた楕円にならない．破れが小さいとき軌道はほとんど楕円軌道と一致するが，長い間にはその近日点がゆっくりと移動する．これについては，一般相対論のところで再び取り上げよう．

3. 等価原理

重力質量 $m_{\rm G}$ と慣性質量 $m_{\rm I}$ の比 $m_{\rm G}/m_{\rm I}$ は普遍定数と考えてよい．この事実を等価原理と呼んでいる．通常いずれにも同じキログラムという単位を使うため，この普遍定数は無次元の 1 になるが，これは本質的ではない．

例えば，重力 $m_{\rm G}g$ を受け，運動方程式

$$m_{\rm I} l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m_{\rm G} g\theta$$

にしたがう長さ l の振り子の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\rm I} l}{m_{\rm G} g}}$$

であり，等価原理の下で T は，おもりの種類や質量によらない．これはニュートンによって 0.1% の精度で確かめられているが，さらに精密に調べたのがエトベスらの実験である．

エトベスらが用いた装置は，ねじりばかりと呼ばれる．これは，細線で棒を水平につるし，その両端に物体を取り付けたものである．各物体には 2 つの力が働く．すなわち地球中心に向かう重力 $m_{{\rm G}i}g\,(i=1,2)$ と地球の自転による遠心力 $m_{{\rm I}i}\alpha\,(i=1,2)$ である（通常これらを区別できないので両者を合わせたものを重力と言っている）．

棒を東西方向に一致させると，遠心力は棒と直交する方向に働く．棒の支点から各物体までの距離を l_i とし，加速度 α の水平成分，鉛直成分をそれぞれ，$\alpha_{\rm s}$ $\alpha_{\rm z}$ とすると，鉛直面内における棒のつりあいは

$$l_1(m_{\rm G1}g - m_{\rm I1}\alpha_{\rm z}) = l_2(m_{\rm G2}g - m_{\rm I2}\alpha_{\rm z})$$

で，棒をその支点のまわりに水平面内で回転させる力のモーメントは $N = l_1 m_{\rm I1}\alpha_{\rm s} - l_2 m_{\rm I2}\alpha_{\rm s}$ であるが，遠心力が重力に比べて小さいことを考慮すると

$$N \simeq l_1 m_{\rm I1}\alpha_{\rm s}\eta, \quad \eta = \left(\frac{m_{\rm G}}{m_{\rm I}}\right)_1 - \left(\frac{m_{\rm G}}{m_{\rm I}}\right)_2$$

となる．ここで η が等価原理の破れに対する評価を与えていることに注意しよう．したがって，力のモーメントに比例するねじれ角 θ が 0 になっていることを実験的に確かめることが等価原理の検証となる．

現実には地球の自転をオン・オフすることはできず，ねじれ角 $\theta=0$ の位置が定まらないため，装置全体を 180° 回転させ，それに伴って生じる $\eta \to -\eta$ の変化を観測している．銅や白金などを使った実験で $|\eta|$ が 5×10^{-9} 程度を越えないことが確かめられた．

エトベスらの実験結果が公表されたのは 1922 年のことであるが，1964 年にはプリンストンのディッケらが太陽による重力と地球の公転運動による遠心力を利用して同様の実験を行った．実験装置の回転は地球の自転によって自然に実現される．つまり，ねじりばかりの偏角のデータから 24 時間周期で変動する成分だけを取り出せばよいことになる．こうして彼らは，金とアルミニウムの組に対して $|\eta|<3\times10^{-11}$ の実験的上限を与えている．

4. 光を伝える媒質

光の波動説が勝利した 19 世紀後半の物理学に新たに与えられた課題は，光を伝える媒質の理解であった．その媒質＝エーテルに対する地球の運動を検出するべく，アメリカの物理学者マイケルソンは一つの実験を企画した．

彼のアイディアは，互いに直交する 2 つの経路を往復する光の干渉によって，このエーテルに対する速度の効果を検出しようというもので，その装置は現在マイケルソン干渉計と呼ばれている．光源から出た波長 λ の光が半透鏡によって互いに直交する 2 つの方向に分けられ，それぞれ L_1，L_2 だけ先にある全反射鏡によって半透鏡に戻され，そこで再結合して検出器に向かう．

速度 v のエーテル流が L_1 に平行になっているものとする．光速を c として往復時間はそれぞれ，

$$t_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = \frac{2cL_1}{c^2-v^2},$$

$$t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

である．装置全体を 90° 回転すると往復時間は

$$t_1' = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$t_2' = \frac{L_2}{c - v} + \frac{L_2}{c + v} = \frac{2cL_2}{c^2 - v^2}$$

となるから, 回転前後での時間差の変化は, $\beta = v/c$ として

$$\begin{aligned}\Delta t &= (t_2' - t_1') - (t_2 - t_1) \\ &= \frac{2(L_1 + L_2)}{c}\left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)\end{aligned}$$

となり，これに対応する干渉縞のずれは

$$\Delta s = \frac{c}{\lambda}\Delta t \simeq \frac{L_1 + L_2}{\lambda}\beta^2$$

と与えられる．

マイケルソンが 1881 年に行った実験では $\Delta s = 0.01$ より大きな位相変化を観測することはできなかった．干渉計の大きさ $L_1(= L_2) = 1.2\text{m}$ を元に計算すると $\beta = 5 \times 10^{-5}$ となるが，これは地球の公転速度（$v = 30\,\text{km/s}$）より小さい．彼自身 1887 年モーリーと共に行った実験を始め，20 世紀に入ってからもさらに追試が繰り返されたが，2 桁以上の精度向上にも関わらず位相変化は確認されていない．エーテルは地球にへばりついているのだろうか？

5. 特殊相対論

特殊相対論は相対性原理と光速度不変の原理を基礎においている．どの慣性系も同等であり，実験の結果は慣性系の選び方によらない．光速の値もまた然りである．したがって，マイケルソン・モーリーの実験結果 $\Delta s = 0$ は特殊相対論においては当然の帰結である．

2 つの慣性系の間の座標変換はローレンツ変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

にしたがう．この変換は時空の計量

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

を不変に保つ．特に $s = 0$ は光の経路を表すので，光速度不変の原理が満たされていることがわかる．

マイケルソンらの時代と違って現在われわれは，宇宙背景輻射に対して太陽系がおよそ 370 km/s の速度を持っていることを知っている．彼らの考えたエーテルの座標系は宇宙背景輻射と読み替えてよいだろう．

以下の議論では $c = 1$ とおく．宇宙背景輻射の座標系 $\Sigma(T, X, Y, Z)$ と実験室の座標系 $S(t, x, y, z)$ の間の座標変換を

$$\begin{aligned} &t = a(v)T + \epsilon x, \quad x = b(v)(X - vT), \\ &y = d(v)Y, \quad z = d(v)Z \end{aligned} \tag{2}$$

とする．特殊相対論では

$$\frac{1}{a(v)} = b(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad d(v) = 1 \tag{3}$$

である．ϵ は時計の同期方法に関わっている．

基準時計を運搬して各点での時計を同期させた場合，アインシュタインが考えたように光を往復させて時計の同期をとる場合，それぞれについて

$$\epsilon = \frac{1}{b}\frac{da}{dv}, \quad \epsilon = -\frac{av}{b(1 - v^2)}$$

と与えられるが，いずれの場合も特殊相対論では $\epsilon = -v$ である．

座標系 Σ において，計量は式 (1) で与えられるが，変換 (2) の下で座標系 S の計量は一般に式 (1) とは異なる．つまり光速度は座標系に依存する．実験結果が特殊相対論の式 (3) と矛盾しないか検証してみよう．

片道の光速

基準時計を運搬して時計を同期させておけば片道の光速を測定することができる．$|v|$ が小さいものとして $a \simeq 1 + \alpha v^2$, $b \simeq 1$, $d \simeq 1$ として，v の 1 次の項までとると x 軸と角度 θ をなす方向に進む光の速度 $c(\theta)$ は

$$c(\theta) = 1 - v(1 + 2\alpha)\cos\theta \qquad (4)$$

となって，$\alpha \neq -1/2$ のとき光速が θ に依存する．

17 世紀，デンマークの天文学者レーマーは木星のまわりをまわる衛星の食観測から初めて光速として有限の値を得た．光速が有限であることを前提にして，木星・地球間の距離変化が，観測される食周期に変動をもたらしていると考えたのである．現在の知識によれば，木星から地球まで光の信号が届くまで平均としておよそ $t = 3000\,\mathrm{s}$ を必要とする．もし式 (4) のように光速がその進む方向に依存するならレーマーの観測にもその影響が現れているはずであるが，実際には誤差 $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ の範囲で余分な周期の乱れは観測されていない．これより $|2(1+2\alpha)v| < \Delta t/t = 10\,\mathrm{km/s}$ である．$v = 300\,\mathrm{km/s}$ とすれば $|\alpha + 0.5| < 2 \times 10^{-2}$ という観測的上限が与えられたことになる．

パラメタ α の値は運動する時計の遅れの効果として，いわゆる横ドップラー効果の検出実験によって調べることができる．

宇宙背景輻射が等方に見える座標系に対して速度 v を持つ実験室の中で互いに逆方向（速度 u と $-u$）に運動しながら $\boldsymbol{u}$ と直交する方向に光をやりとりするとき，その送受信の周波数 ν_1, ν_2 は

$$\nu_1 = \nu_2[1 + 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}(1 + 2\alpha)]$$

という関係を満たす．互いに逆方向に進む分子線から発せられるメーザーのビート周波数測定や，回転円盤の直径上での線幅の小さい γ 線の共鳴吸収実験などから得られた結果は $v = 300\,\mathrm{km/s}$ として $|\alpha + 0.5| < 10^{-7}$ である．

光の往復実験

光を使って時計を同期させたとき，片道の光速を測定することには意味はない．このとき光速は

$$c(\theta) = \frac{b(1 - v^2)}{a\sqrt{\cos^2\theta + b^2 d^2 (1 - v^2)\sin^2\theta}}$$

と表され，v の 1 次の効果は現れない．微小な v^2 の効果を検出するためにマイケルソン・モーリーの実験のような工夫が必要になる．今度は

$$a \simeq 1 + \alpha v^2, \quad b \simeq 1 + \beta v^2, \quad d \simeq 1 + \delta v^2$$

と展開すると

$$\frac{1}{c(\theta)} \simeq 1 + (\alpha - \beta + 1)v^2 + \left(\beta + \delta - \frac{1}{2}\right) v^2 \sin^2\theta$$

となる．特殊相対論では，運動方向に生じるローレンツ収縮から右辺第 3 項が，ローレンツ収縮と時間の遅れの調和から第 2 項が 0 となる．

マイケルソン・モーリーの干渉計出力は

$$\Delta t = (L_1 + L_2)(2\beta + 2\delta - 1)v^2 \cos 2\theta$$

と与えられる．この実験では α を含む項が落ちていることに注意しよう．彼らの実験結果を使うと $|\beta + \delta - 0.5| < 10^{-3}$ となるが，メタン安定化 He–Ne レーザーとファブリペロー共振器を使った新しい実験では $|\beta + \delta - 0.5| < 5 \times 10^{-9}$ という値が得られている．

マイケルソン・モーリーの実験では干渉計を回転させたが，実験室はきっとエーテルに対して速度を変化させているに違いない．そう考えて，実験室に固定された干渉計の出力を長時間観測したのがケネディーとソーンダイクの実験である．この実験ではマイケルソン・モーリーの実験で落とされた効果を観測することができる．

$$\Delta t = 4(L_1 - L_2)(\alpha - \beta + 1)\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{v}.$$

ここで $v = 300\,\mathrm{km/s}$, Δv としては日周運動を考え，データから 24 時間周期の成分を取り出すことによって $\alpha - \beta + 1 = 0.02 \pm 0.02$ という値が得られている．マイケルソン・モーリー型の実験と同様に，新しいレーザー技術を応用した実験が行われているが，それによると $|\alpha - \beta + 1| < 7 \times 10^{-5}$ である．また，月へのレーザー測距データからも 1.5×10^{-4} という観測的上限が与えられている．

6. 重力による周波数偏移

等価原理によれば，重力場中ではあらゆる物体

が同じ加速度を持って落下する．したがって自由落下する系で観察すれば物体の軌道から重力の効果を消し去ることができる．そこで，これが物体の軌道だけでなく，あらゆる物理現象について成り立つものと仮定して，特に光に関わる現象を次のように考えてみよう．

一様重力場中で周波数 ν の光を下向きに発射する．上の仮定から，光の放射と共に自由落下する座標系でみると振動数はいつでも ν である．光が h だけ進んだとき，自由落下する系は地上の観測者から見て $v = gh/c$ の速度を得ているから，ドップラー効果を考慮すると地上の観測者は

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2}$$

だけずれた周波数の光を観測することになる．この効果は高い塔での γ 線の共鳴吸収や原子時計を搭載したロケットの追跡実験などにより，10^{-4} の精度で確かめられている．太陽重力場中を自由落下する地球上に設置された 2 種類の精密時計を相互比較する実験も行われている．実験で用いられた 2 種類の時計は 1% の精度で一致している．

重力場中で自由落下する系での物理法則は特殊相対論にしたがうことが期待される．これは上で述べた等価原理の拡張と合わせて，一般相対論の前提になっている．

7. 一般相対論

一般相対論では，重力の効果を時空の歪みと捉える．式 (1) の代わりに計量を

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + \cdots$$

と書くとき，$g_{\mu\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ は重力場によって決まる．以下の議論のために，場が弱く静的で球対称であるとして，質量 M の球体からの距離 r の点で

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{r} - 2\beta\left(\frac{2GM}{r}\right)^2 + \cdots,$$

$$g_{0j} = 0, \quad g_{jk} = \left(1 + \gamma\frac{2GM}{r}\right)\delta_{jk} + \cdots$$

のように展開する．パラメタ β, γ はそれぞれ，重力場の重ね合わせに対する非線形性，質量が作り出す空間の歪みと関係している．一般相対論では $\beta = \gamma = 1$ である．

一般相対論の検証は主として太陽系を実験室として行われている．太陽の近傍を通過する光は重力によって遅延を生じ，その大きさは最大で $\Delta t = 120(1+\gamma)\,\mu\mathrm{s}$ となる．探査機バイキングの追跡電波を使った実験では，$|\gamma - 1| < 0.002$ が得られている．

また，一般相対論によると惑星の軌道は閉じた楕円にならず，水星の近日点移動は

$$\dot{\omega} = 42.''95\frac{2 + 2\gamma - \beta}{3}/100\mathrm{yr}$$

となるが，観測データの解析結果の示すところによれば $(2 + 2\gamma - \beta)/3 = 1.003 \pm 0.005$ である．

このほか連星パルサーのタイミング観測データなども一般相対論を支持している．

8. まとめ

重力場中で物体は等しく落下し，自由落下している系では重力の効果を 0 にすることができた．また，光速はそれを観測している慣性系の選び方によらない．つまり観測する系に対する依存性が 0 であることが高い精度で確認され，特殊相対論が検証された．同様に一般相対論についても 1% よりよい精度で確認がなされている．

一方，惑星の軌道に目を転じると，円軌道 $(e = 0)$ から楕円軌道（$e \neq 0$, $\dot{\omega} = 0$）そして一般相対論による近日点移動（$\dot{\omega} \neq 0$）といった具合にパラメタが 0 から離れるたびに自然に対する認識が深まっていることは興味深い．自然は本当に 0 を好んでいるのだろうか．

参考文献

1) 霜田光一：『歴史をかえた物理実験』丸善 (1996).
2) Clifford M. Will., “Theory and experiment in gravitational physics”, Cambridge University Press (New York) 1981.

（ひらお・じゅんいち，大東文化大学法学部）

宇宙の豊穣なる0



杉山　直

現在の宇宙空間は，ほとんど空っぽ，すなわち0である．しかし，その0の裏には，宇宙全体で見れば大量の真空のエネルギーが隠されていて，宇宙全体の空間の膨張を加速させる役割を担っていることが明らかになってきた．このような豊穣な真空が存在するのは，宇宙の歴史において少なくとも2回目である．一度目は，宇宙誕生直後のことであり，そのときの真空のエネルギーが引き起こした宇宙の大膨張こそ，インフレーションである．現在の宇宙もまた，二度目のインフレーションへと向かっているのである．

1. 現在の宇宙：高度な真空

現在の宇宙では，物質密度は極端に小さい．最新の観測結果によれば，宇宙の平均密度の値は，$2.7 \times 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$ である．この値を常温での水の密度，$1\,\mathrm{g/cm^3}$ や地球の密度，$5.5\,\mathrm{g/cm^3}$ と比べてみれば，その小ささが際立つ．平均すれば，宇宙はほとんど空っぽなのである．また最新の宇宙論の成果によって，宇宙に存在する物質のうち，15% のみが水素やヘリウムであり，残りの 85% は未知の物質，ダークマターであることが明らかにされている[1]．ほとんど物質の存在していない宇宙であるが，さらに通常の元素はわずか密度にして $4.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$ でしかないのである．この密度を，陽子・中性子の質量 $1.67 \times 10^{-24}\,\mathrm{g}$ で割ることで，宇宙に存在している陽子・中性子の数密度が 2.5×10^{-7} 個 $/\mathrm{cm^3}$ であることがわかる．つまり平均的には，一辺 1.6 m の箱を用意すると，その中に一個の陽子か中性子が含まれるという勘定になる．

さらに，宇宙には物質以外にも，放射成分（質量0の成分）が存在していることも知られている．1965年に発見された宇宙マイクロ波背景放射である．宇宙誕生後 40 万年の時代に放たれた光である宇宙マイクロ波背景放射は，温度が 2.725 K の黒体放射であることが COBE 衛星によって明らかにされた[3]．黒体放射，すなわちプランク分布であることからそのエネルギー密度は即座に計算できる：

$$c^2\rho_\gamma = \int_0^\infty d\nu \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1} \tag{1}$$

$$= \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 \tag{2}$$

$$= 4.17 \times 10^{-13}\,\mathrm{erg/cm^3} \tag{3}$$

ここで c, h, k はそれぞれ光速度，プランク定数，ボルツマン定数である．また，光子の数密度も

$$n_\gamma = \int_0^\infty \frac{d\nu}{h\nu}\frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1} \tag{4}$$

$$= 411\,\mathrm{cm^{-3}} \tag{5}$$

と表すことができる．数で考えればかなり多いと思われるかもしれない．しかし，エネルギー密度を光速の2乗で割って密度に直すと，その値は物質密度の 0.02% にもならない．

ほとんど空っぽといえる宇宙空間であるが，一方で宇宙は巨大である．たとえ密度はとてつもなく0に近いといっても，現在の宇宙「全体」に含まれている物質の質量は非常に大きなものとなる．むしろ，この質量が宇宙の「大きさ」を決めているといってもよい．球形の領域の表面からの脱出速度を考えてみる．球内部の質量 M は，球の半径を R，そこでの物質密度を ρ とすれば $M = 4\pi R^3\rho/3$ である．表面での重力ポテンシャルの値は $-GM/R$ であるから，脱出に必要な最小速度 V は $V = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{8\pi G R^2\rho/3}$ となる．この速度がちょうど光の速度 c と等しくなる大きさが，現在の宇宙の大きさである．光をもってして

も宇宙の重力を振り切れなくなる，という限界だからである．先の密度の値を代入すると，宇宙の大きさは $R = c/\sqrt{8\pi G\rho/3} = 1.3 \times 10^{28}$ [cm] である．さて，宇宙での距離の単位として Mpc（メガ・パーセク）という値をよく用いる．これはおよそ宇宙での平均銀河間距離に相当し，$1\,\mathrm{Mpc} = 3.09 \times 10^{24}$ [cm] である．結局宇宙の大きさは，$R = 4200\,\mathrm{Mpc}$ となる．これこそが，ほとんど 0 に近い物質密度によって，光をも閉じこめるだけの重力を生み出すために必要な大きさなのだ．

また，現在の物質密度，放射密度がほとんど 0 であることが，宇宙の歴史においても常にそうであったことを保証するものでもない．現在の宇宙は膨張している．そのため，密度は時々刻々と低下している．密度と宇宙の膨張の関係は，注目している物質の状態方程式，すなわち圧力 p と密度 ρ の関係によって異なる．状態方程式を一般に $p = wc^2\rho$ と書くことにしよう．w は一般には時間とともに変化してもよい変数で，例えば静止質量密度に比べて圧力の無視できる通常の物質では $w = 0$，放射では $w = 1/3$ である．ここで熱力学の第一法則を考える．宇宙では外部からの熱の出入り dQ はないので，

$$0 = dQ = dE + pdV \tag{6}$$

と書かれる．ここで dE は内部エネルギーの増分で $E = c^2\rho V$ であり，体積の増分はスケール因子 a を用いて $dV \propto d(a^3)$ と書かれる．スケール因子とは，力の働いていない 2 点間の距離が空間の膨張や収縮によってどれだけ伸びたり縮んだりするのかを表す．距離が 2 倍になればスケール因子が 2 倍になったと考えるわけである．スケール因子を用いれば，熱力学の第一法則は $0 = d(\rho a^3) + pd(a^3)$ となる．これに $p = wc^2\rho$ を代入して解くと，$\rho \propto a^{-3(1+w)}$ を得る．$w = 0$ の通常の物体の場合には，$\rho \propto a^{-3}$，放射では $\rho \propto a^{-4}$ である．前者は，体積の増分 $dV \propto d(a^3)$ に反比例して密度が減少するというごく当たり前の結果を示しているにすぎない．

物質密度が a^{-3} に比例し，放射エネルギー密度が a^{-4} に比例しているという事実は，a が小さかった過去の宇宙では両者とも非常に大きな値であったことを意味している．また，過去にさかのぼると放射成分のほうが物質成分に比べ，密度の値を急激に増加させていく．かつては，宇宙は非常に高温（放射成分の密度が高い），かつ高密度であったのである．高温高密度の宇宙の始まりこそ，ビッグバンである．これまでの宇宙の歴史とは，高温高密度状態から，0 温度，0 密度状態へと膨張していく過程に他ならないといえよう．

2. 真空を支配するダークエネルギー

最近，宇宙全体の大きさを考えたときには，物質の作り出す重力，すなわち引力成分以外に，どうも斥力成分が存在していることが明らかになってきた．遠方の宇宙での膨張の速度を調べてみると，現在の宇宙の膨張が時々刻々と速くなってきている，つまり加速していることがわかってきたのである[2]．重力は宇宙全体を潰す方向にのみ働くので，膨張宇宙はその速度を減じていくはずである．膨張を加速させるためには，重力以外の斥力として働く何らかの「力」が宇宙を支配していなければならないのである．

このような斥力を生み出す例として，よく知られているものに宇宙項（宇宙定数）がある．宇宙項はアインシュタイン自身によって一般相対性理論の基礎方程式に導入された特別な項である．一般相対性理論を完成してすぐに，アインシュタインは理論を宇宙全体の発展に適用しようと試みた．当時，天文学者は宇宙が膨張や収縮をしたりせず，静的なものであると考えていた．そのため，アインシュタインも静的な宇宙論を構築しようとしたのだが，そこで大きな問題が持ち上がった．宇宙を止めておこうとしてもその内部に存在している重力によって，収縮していってしまうのである．そこで，アインシュタインは，やむなく重力と釣り合う斥力（つまり反重力）を基礎方程式に導入することにした．しかし後になって，宇宙が膨張していることがハッブルによって観測的に示され，宇宙を静止させておく必要はもはやなくなった．宇宙項は無用の長物となったのである．宇宙項を方程式に付け加え，いたずらに複雑なものにしたことを恥じたアインシュタインは，その導入を「生涯最大の失敗」と述べたと伝えられる．

しかし，もし現在の宇宙の膨張が加速しているとすれば，宇宙項のように斥力として働く存在が再び必要となる．アインシュタインの生涯最大の失敗は，２０世紀の終わりに観測によって復権したのである．最新の観測結果は，宇宙の全（エネルギー）密度のうち 73% がこの宇宙項成分，残りの 27% がダークマターと元素であることを示している[1]．

では宇宙項の正体とはいったい何なのであろうか．正体に迫るためには，斥力として働くために必要な性質

を知る必要がある．ここで鍵となるのは，宇宙を支配している「物質」の密度と圧力の間の関係式，すなわち状態方程式である．宇宙全体の進化を決定付けるのは，まず密度 ρ によって作り出される重力である．しかし，相対性理論によれば，質量とエネルギーは等価であることから，静止質量に対応する密度だけでなく，運動のエネルギーに対応させることのできる圧力 p もまた，重力の源となり得る．相対性理論では，ρc^2+3p が重力を生み出すのである．ここで p の係数 3 は，x, y, z の 3 つの空間次元と関係している．結局 $\rho c^2+3p<0$ が斥力である条件，ということになる．つまり $p<-\rho c^2/3$ である．状態方程式として，$p \equiv w\rho c^2$ と一般的においたときに，$w<-1/3$ が，宇宙を加速させる条件となるのだ．

斥力として働くためには圧力が負でなければならない．このことは熱力学の第一法則からも明らかである．外部から熱 Q が加えられないのに，内部エネルギー E を増加させ膨張を加速させるためには，膨張によって行う仕事 pdV が負でなければならないのである．このことを式で表せば，$0=dQ=dE+pdV$ となる．$dE>0$ を満たすためには，$p<0$ が要求されるのである．

さて，負の圧力を持つ「物質」とはいったいどのようなものなのであろうか．もちろん通常考えるような物質ではあり得ない．先に述べたように，例えば，水素ガスなどの通常の物質では，密度に比べて圧力が無視できる．$w=0$ なのである．これはダークマターでも同様である．一方，放射成分では，$w=1/3$ となる．いずれにしても $w<-1/3$ にはなり得ない．

ここで，スカラー場 ϕ を考えてみよう．ポテンシャルを $V(\phi)$ とすれば，ラグランジアンは $L=(1/2)(\dot{\phi})^2-V(\phi)$ と表され，そこから得られる密度と圧力は各々 $c^2\rho=(1/2)(\dot{\phi})^2+V(\phi)$，$p=(1/2)(\dot{\phi})^2-V(\phi)$ となる．運動エネルギー項 $(1/2)(\dot{\phi})^2$ に比べて，ポテンシャル項 $V(\phi)$ が十分に大きい場合には，$w \equiv p/c^2\rho \simeq -V(\phi)/V(\phi)=-1$ となり，宇宙を加速膨張させるのに必要な条件を満たす．一方，ポテンシャルが無視できる自由運動の場合には，$w=1$ であり，減速膨張を与える．加速膨張が実現するのは，ポテンシャルが運動エネルギーに比べて十分に大きい場合なのである．

運動エネルギーが小さく，ポテンシャルの値が大きいようなスカラー場が宇宙全体に満ちていて，宇宙の（エネルギー）密度を支配していれば，宇宙は加速膨張することになる．ポテンシャルが 0 ではなく正の有限の値を取ることもそこで必要な条件である．直接，粒子としては測定できないような場が持つエネルギーが宇宙を支配しているために，これを「ダークエネルギー」と呼ぶ．

一見，何も存在していないように見える銀河間空間の真空には，ダークエネルギーが存在していたのである．それどころか，宇宙全体のエネルギー密度の大部分を占めていて，宇宙を支配していたのだ．宇宙の真空，それは豊穣なる真空とでも呼ばれるものであったのである．

3. ダークエネルギーの作り出す宇宙初期の 0

ダークエネルギーの働きは，宇宙を加速膨張させることであるが，その結果，宇宙は急激に空っぽになっていき，物質密度，空間の曲率ともに 0 へと向かうこととなる．それは現在の宇宙の未来の姿であるとともに，また過去の宇宙に生じた出来事でもある．

宇宙が誕生後 10^{-35} 秒の頃経験したインフレーションと呼ばれる急膨張こそ，ダークエネルギーによって 0 へと宇宙が導かれた現象である．むしろ，0 へ向かうことが観測的に要請されたためにインフレーションが考案されたといってもよい．

宇宙の始まりには，物質の作り出す重力によって空間は平坦ではなく曲げられていたと考えられる．物質の存在が空間曲率を生み出していたのである．宇宙が膨張するとともに，空間の曲率は小さくなっていく．また同時に物質密度も低下していく．宇宙の膨張・収縮を定量化するために，第 1 節ですでに用いたスケール因子を導入する．さて，物質の密度はすでに述べたようにスケール因子の 3 乗に反比例して膨張とともに減少していく．一方，空間曲率が宇宙の膨張に及ぼす影響はスケール因子の 2 乗であることが，一様等方空間を仮定したアインシュタイン方程式から得られる．この結果，膨張とともにスケール因子が増大していくと，密度も曲率も減少していくが，両者を比べると，密度のほうがより急激に減少していくことがわかる．ごくわずかな時間で，宇宙の物質密度はほとんど 0 になり，宇宙は完全に曲率によって支配されることになるのである．放射成分についても同様である．むしろエネルギー密度がスケール因子の 4 乗に反比例している分，より速く減少していくことになる．

しかし，実際に空間曲率と物質密度を，誕生してからおよそ 140 億年の現在の宇宙で比較してみると，曲率

はむしろ物質密度よりも小さいことが明らかにされている．曲率に支配されるどころか，むしろ物質によって支配されている現在の宇宙を説明するためには，宇宙初期に曲率をほとんど 0 にする物理過程が働いたと考えるしかない．

宇宙を 0 にする過程こそ，インフレーションである．典型的には 10^{40} 倍にもなる莫大な膨張は，曲率，物質密度ともほとんど完璧に 0 にする．現在の宇宙よりもはるかに空っぽな宇宙が，インフレーションが終わる直前には実現していたのである．当時の物質密度は現在よりも 35 桁以上小さく，エネルギー密度に換算した曲率は，現在の物質密度より 24 桁ほど小さい．

では，空っぽな宇宙がどのようにしてビッグバンを経て現在の宇宙へと至ったのであろうか．それは真空のエネルギーの解放という過程によって達成された．真空自身が，宇宙を加速膨張させるエネルギーを担っていたわけだが，そのエネルギーが今度は熱へと変換されるのである．相転移の考え方を用いれば，潜熱の解放にあたる．真空のエネルギーによって高温の熱平衡状態を回復した宇宙こそビッグバンである．その際に，粒子・反粒子対生成の過程などを通じて，宇宙は物質に充たされた高密度状態になる．豊穣なる真空の作り出した 0 からの宇宙の創成である．

4. そして再び 0 へ

真空から生まれたビッグバン宇宙は，膨張によってその温度を下げ，現在では 2.725 K であることが観測によって明らかにされている[3)]．そして，現在の宇宙は，ダークエネルギーによって支配され，加速膨張しているようである．この膨張を時々刻々と加速させている宇宙の未来は果たしてどのようなものなのであろうか．

膨張が加速するということは，遠方の銀河などの天体が遠ざかる速度が速くなっていくことを意味している．やがてその速度が光速度に近づいていくと，奇妙なことが起こる．ちょうどブラックホールの中に落ち込んでいく物体を見るのと同じように，観測者にとってはその天体はいつまでも観測することが可能であるが，そこでの時間は観測者の時間に比べて極めてゆっくりと進行することになる．過去の姿をいつまでも見続けるのである．またそれとともに，猛烈な赤方偏移が生じる．現在では可視光で観測できる銀河からの星の光が，赤外線，やがて電波へとその波長を伸ばしていくのだ．その光度（見かけの明るさ）も著しく減少しとてつもなく暗くなるために，観測することが極めて困難になる．

加速膨張する宇宙では，ブラックホールの場合と全く同様に，いわゆる事象の地平線が形成されるのである．観測者はそこでは，もはや，新たな遠方の天体の情報を得ることができなくなる．見える宇宙の範囲が時間とともに増えることがなくなってしまうのだ．

このような宇宙の最終的な運命がどのようなものになるのかは，ダークエネルギーの性質によって左右されると考えられている．

まず，ダークエネルギーの状態方程式が $-1 \leq w < -1/3$ であり，永遠に存在し続ける場合を考えよう．このときは，事象の地平線に囲まれた宇宙が加速膨張しながら永遠に存在することになる．現在すでに重力的に束縛されたシステムになっている銀河や銀河団などは，そのまま存在できるであろう．では銀河系に残された観測者の見る宇宙はどのようなものになるのだろうか．我々の銀河系と束縛し合っている最大の構造は，現時点では，局所銀河群と呼ばれる 30 個程の大小の銀河からなる集団である．この局所銀河群は，未来においても観測可能な構造として残るだろう．それどころかもしかすると，おとめ座銀河団と呼ばれる銀河数 100 個で構成されている集団に，将来取り込まれるかもしれない．しかし，未来の観測者にとっては，それが観測できるほぼすべてということになる．現在私たちが観測している遠方の銀河や銀河団，また宇宙の大規模構造などは（よほど波長の長い電波で観測しない限り）目にすることができないのである．

宇宙全体で見ても，将来は新たな構造が形成されることがなくなる．現在までの宇宙では，小さい構造から大きい構造が生まれてきたことが観測及び理論の両方から明らかにされている．現在の宇宙で，構造として完成している，すなわちビリアル化している最大のものは銀河団である．それをしのぐような宇宙の大規模構造は，今まさに形成されている最中なのである．将来の宇宙では，加速膨張の影響により，物質が重力によってこれ以上集まることが困難になる．膨張によって引き離される力が，重力に打ち勝つからである．実際に密度分布の成長の計算を行った結果から，宇宙大規模構造よりもさらに大きな構造が形成されないということが明らかにされている[4)]．

やがて星は重いものから順にその寿命を終えることになる．現在の宇宙では，一生を終えた星はその周り

にガスをまき散らし，そのガスが再び集まることで，次の世代の星が誕生することがしばしば起きる．また銀河の周囲にあるガスが銀河の重力に引かれて降り積もってくることでさらなる星の原料を提供している．しかし，加速膨張する宇宙では，銀河の重力に引かれる前にガスは遠方へ飛び去っていってしまう．重い星の終末段階に生じる超新星爆発などでも，時として星のガスを銀河間空間まで飛び散らすことがある．そうなると，二度と戻ってこない．新たな燃料の供給を絶たれた銀河の星は，一番軽いものさえも100兆年もすれば，寿命が尽き白色矮星へと姿を変える．その頃には，銀河にはブラックホール，中性子星，そして白色矮星などの星のなれの果てしか残されていないであろう．長い時間かけて，ブラックホールは合体を繰り返し，中性子星や白色矮星を含む周囲の物体を取り込み，巨大なものに育っていく．やがて，ブラックホールのみが残された宇宙になってしまうのである．たとえブラックホールに取り込まれないとしても，陽子はいつの日にか陽電子とニュートリノに崩壊するものと考えられている．陽電子は電子と対をつくりポジトロニウムと呼ばれる原子のような構造を形成するかもしれないが，加速膨張する宇宙では，空間を引き離す力のほうが大きいために，それも難しそうである．結局残るのは，ブラックホールと電子，陽電子だけである．もっとも現在の宇宙に大量に存在しているダークマターについてはその正体がまだ明らかでないために，その運命がどのようなものになるのかはわからない．しかし，いずれにせよ，莫大な膨張によって希薄になっていることだけは確かである．

ブラックホールもやがてホーキング放射を出し，蒸発していく．重いブラックホールほど蒸発までの時間がかかることが知られていて，例えば銀河質量のブラックホールでは 10^{100} 年かかると考えられている．ブラックホールがなくなった後には，もはや宇宙で光を出している天体は存在しないであろう．宇宙に残されているのは，限りなく希薄になっている電子，陽電子，ニュートリノ，そしておそらくダークマター，また，その波長をとてつもなく赤方偏移させた宇宙マイクロ波（もちろんもはやマイクロ波ではない）背景放射だけであろう．

冷たく，希薄になった宇宙が永遠に存在する，というのが $-1 \leq w < -1/3$ の場合の宇宙の運命となる．

この場合でもインフレーションの場合と同様，やがてこのダークエネルギーが熱に転換される，という可能性は残されている．果たしてその熱で再び宇宙はビッグバンを起こすのだろうか．残念ながらそうはならない．インフレーションの時期の真空のエネルギーは，エネルギー密度で考えれば，その頃の高温・高密度の宇宙のエネルギー密度に打ち勝つような莫大な値であった．当時の宇宙はとても小さなものであったので，宇宙全体（地平線内）に含まれる真空のエネルギーとしてはそれほど大きくはなかったが，エネルギー密度としては巨大なものであったのである．インフレーションが始まる当時の宇宙の温度はおよそ 10^{28} K 程度であった．この値は統一理論のエネルギースケール 10^{16} GeV に対応して決まると考えられている．式 (2)（ステファン・ボルツマンの法則）から，黒体放射のエネルギー密度が温度の4乗に比例することがわかる．現在は 2.725 K で，エネルギー密度は 4.17×10^{-13} erg/cm^3 であるから，10^{28} K では $4.17 \times 10^{-13} \times (10^{28}/2.725)^4 \sim 10^{98}$ erg/cm^3 となる．この莫大なエネルギー密度（の一部）が再び熱に変換されるのが，ビッグバンの始まりである．一方，2節で述べたように，現在の宇宙のダークエネルギーは，宇宙全体の密度の 73%，すなわち 6.9×10^{-30} g/cm^3，エネルギー密度に直して 6.2×10^{-9} erg/cm^3 となる．これは 2.725 K の宇宙マイクロ波背景放射の 15000 倍でしかない．温度はエネルギー密度の 1/4 乗だから，もし未来に現在のダークエネルギーのエネルギー密度がすべて熱に変換されたとしても，そこでの温度は高々 30 K にしかならない．この温度では，せいぜい遠赤外線で輝くだけ，ということになる．ビッグバンなどはとても起こらない．

もし $w < -1$ であれば，とてつもない運命が宇宙を待ち受けることになる[5)]．スカラー場の場合には，これは運動エネルギー項が負でなければならないので，あまり現実的ではないかもしれない．実効的に $w < -1$ になるモデルもこれまでいろいろ提案されているが，未だどれも現実的なものとはいえない．ここでは理由は問わないが，とにかく $w < -1$ であったと考えてみる．すると，この場合には有限時間内にスケール因子 a が発散する．つまり空間が裂けてしまうのである．空間曲率がそこでは発散するために，数学的には特異点になる．ビッグリップ（big rip）と呼ばれている宇宙の最後である．この場合には，宇宙を加速させる力があまりに大きいために，すでに重力的に結びついている構造も安定に存在し続けることができなくなる．それどころか重力以外の力，電磁気力や核力にさえ，ダークエネルギーの力は最終的には打ち勝つので

ある．$w = -3/2$ の場合には，宇宙の終わりは，現時点から 200 億年程後のことになる．終末段階へ向かって，まず銀河などの構造がバラバラになる．すべての終わりの 6000 万年前頃のことである．終末の 3 カ月前には太陽系が壊れ，30 分前には地球がバラバラになる．10^{-19} 秒前には原子も壊れ，ついに空間が引き裂かれ宇宙は終わりを告げるのである．

宇宙に存在する豊穣なる 0，ダークエネルギーは，ビッグバンの始まりを演出し，宇宙の終わりもまた決定するものであった．かくも重要なダークエネルギーではあるが残念ながら今のところその正体は謎に包まれている．ここではスカラー場をその候補として紹介したが，これまでにスカラー場の存在は一切確認されていない．ダークエネルギーの解明が 21 世紀の物理学，天文学の最も重要なテーマの一つであることは疑いない．実際に天文学的に宇宙の膨張則を精密に測定し，w を決定するというプロジェクトがすでに複数走り出している．その成果に大きな期待を寄せて，本文を閉じることにする．

参考文献

1) D.N. Spergel et al., *Astrophysical Journal Supplement*, **148** (2003) 175.
2) S. Perlmutter et al., *Astrophysical Journal*, **517** (1999) 565.
3) D.J. Fixsen et al., *Astrophysical Journal*, **473** (1996) 576.
4) T. Chiba, R. Takahashi, N. Sugiyama, astro-ph/0501661, to appear in Class. Quantum Grav.
5) R.R. Caldwell, M. Kamionkowski, N.N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003) 071301.

（すぎやま・なおし，国立天文台理論研究部）

数（上，下）

H.D. エビングハウス他著，成木勇夫訳，B6 判，
上巻：240 頁，本体 2700 円，下巻：280 頁，本体 2700 円，
シュプリンガー・フェアラーク東京




「数」というありふれたタイトルながら，これはありそうでいてなかなかない本である．

「数」は数学のためになくてはならない素材であるが，この書物では「数学のための数」ではなく，「数のための数学」が語られている．

これを仮にピアノという楽器に譬えるなら，ピアノが奏でる音楽を論じるのではなく，ピアノという楽器そのものについて，その歴史や構造や特徴を，様々な観点から描き尽くそうという，大層贅沢な企画に譬えられるかも知れない．つまり，たとえば連分数やゼータ関数のような，数が奏でる美しい数学を鑑賞するのではなく，「数とは何か」という問いに徹底して答えるべく，必要な数学的道具を鍛えつつ妥協を許さず目標を追求する，あたかもドイツマイスターのこだわりのようなものを感じさせる本である．7 人の著者と 1 人の編集者が南ドイツの「黒い森」にあるユニークな研究所で「幾晩にもわたる会合」をして（第 1 版の）企画を練ったとのことであるが，しばし本業を離れて議論にふける「マイスターたち」の姿が想像される．

上巻に収められた第 1 部は，自然数を出発点に，有理数，実数を経て，複素数に至る階梯を一つ一つ昇って行く．その最後に，代数学の基本定理についての章，π についての章，そして p 進数についての章が置かれている．さらに下巻には，4 元数と 8 元数を主題にした第 2 部を中核として，付録的な内容の第 3 部が収められている．

どの章も，概ね 3 つの観点から「数」を語ろうとしているように見える．3 つの観点とは，自然数や実数などの数の各階層についての「歴史的素描」，「数学的定義」，「公理的特徴づけ」の 3 点である．

たとえば第 1 部の「実数」の章では，正 5 角形の中に通約不可能な線分を発見したとされる Hippasus や，五角星形の魔力によりメフィストを抑制するファウストに言及し，無理数が数学的実在として認識される歴史を見て，実数の厳密な定義を与える Dedekind や Cantor などの流儀について述べる．そして，「完全性公理を満たす全順序体は本質的に実数体に限る」という意味で実数体を特徴づける．さらに，実数論は無矛盾かという問いを提出し，集合論が無矛盾なら実数論も無矛盾であると結論するのであるが，第 3 部の「集合論と数学」の章は，集合論の無矛盾性を論ずる内容になっている．同じく第 3 部の「数とゲーム」の章は，Dedekind の切断とある種のゲームの必勝法との関係を指摘する Conway の理論の紹介である．

このほか第 1 部においては，たとえば，複素数が数学社会で認知されるに至る歴史や，代数学の基本定理に取り組む Gauss の逸話や，π を厳密に定義する様々なアイディアなど，興味深い叙述が続くのだが，著者の一人である Remmert の担当する章はとりわけ秀逸であり，本書の価値を高めていると思う．

第 1 部において昇りつめた階段を，第 2 部では反対側に降りることになる．すなわち最も豊かな数の体系である複素数を超えて，より大きな広がりを得ようとすると，（ファウストのように？）必然的に何かを失うことになる．まず 4 元数体を得る代償としては可換性を，さらに 8 元数体を得る代償としては結合律を失う．そして 8 元数を超える体系はもはや存在しないという事実が告げられる．これらのストーリーは「実可除代数」という枠組の中で展開されるのだが，その次元が 1（実数），2（複素数），4（4 元数），8（8 元数）に限られるという深遠な定理は，トポロジー（Bott の周期性定理）を用いて示される．そして第 2 部の最後に置かれた Hirzebruch による章「可除代数とトポロジー」で，読者は「数のための数学」がより広い世界につながっていることを知り，一種の解放感を味わうのではないだろうか．

この本は簡素なタイトルとは裏腹に，完全な理解を得るためにはかなりの素養と忍耐を要する．しかし，理解しやすい所を拾い読みするだけでも十分好奇心を満たし，‘教養’ を授けてくれるだろう．訳文も，特に原文が優れていると思われる章は読みやすい．学習，教育，研究を問わず，数学を好む様々な人が，それぞれの立場から楽しめる本であると思う．

渡辺　浩（日本医科大学数学教室）

アインシュタイン 16歳の夢



戸田盛和著，新書判，208 頁，本体 740 円，岩波書店

先ず本書の構成から．全 6 章から成り，I 若き日のアインシュタイン——生い立ちと環境，II アーラウの夢——光を追いかけたら，III 光とはなにか——力学と電磁気学，IV 天才の開花——1905 年，奇跡の年，V 特殊相対性理論——光と空間・時間，VI その後のアインシュタイン——ニュートンを超えて．これからお分かりのように，本書はアインシュタインの小伝である．「岩波ジュニア新書」中の一冊で，ジュニアとは高校生辺りを指すらしい．それをシニア向けの本誌が書評するというので何故？ と一瞬訝ったが，読むうちに謎は氷解した．評者の如き超シニアにも非常に面白いのである．そこで，これまでアインシュタインの伝記などをと敬遠してきたシニアの方々にも，「世界物理年」記念として，是非一読をお勧めしたい．

それでは，何がどうして如何に面白いのか？ 勿論その第一は本書の ‘なかみ’——対象とするアインシュタインの，物理はともかく，その人間的魅力にある．このことを示す逸話が次々と出てくる．例えば，学校の授業には余り熱心ではなく，いわゆる秀才タイプではなかったが，自分で面白いと思ったことには，徹底的に考え抜く性向だったとか．表題の「16 歳の夢」とは，アーラウ（スイス）での高校生だった 1895 年，「光の波を高速で追いかけたら，波はどう見えるだろうか」と夢想したことを指す．この夢をずっと追い続け，10（デケード）年後の 1905 年（26 歳），特殊相対論として結実させる．一般相対論の完成はさらに 10 年後の 1915 年（36 歳）のことであり，この ‘デケード構造’ は，偶然のことではあろうが，不思議な符合である．第一，第二の 10 年間には，それぞれベッソーやグロスマンというよい友人に恵まれ，彼等の助言が特殊および一般相対論の完成に大きく寄与したという．また最初に就職した特許局が，底の浅い仕事を沢山やらされる大学などではなかったことも幸いした．特許局の自室でこっそり物理の計算をしていて，人の足音が近づくと急いでそれを抽出しに隠すのだった．後年このことを想い出すたびに，自責の念に駆られていた——といった類の話多数．

面白さの第二は本書の ‘かたち’——著者の文章からくる．それぞれの時期におけるアインシュタインが，その周囲の状況のあれこれとともに幅広い観点から俯瞰され，その全体像が浮かび上がる．このような場合，ことの ‘本筋’ と ‘脇道’ のバランスが決め手となるが，この辺りの匙加減はまことに絶妙である．また独特のソフトな語り口にはえも言われぬ味がある．これは著者の人柄そのままであり，改めて「文は人なり」を思う．要するにこの著者は，優れたオーサーであるばかりか，優れたストーリー・テラーでもあるらしい．

この ‘面白い本’ を，例えば大学の文科生に対する理科の教本として使ってみては如何であろうか．アインシュタインの業績は物理の広い分野にわたり，それぞれについて簡潔な説明がすでに与えられている．教師はこれらに適宜技術的な補足を付けて講ずればよい．こういった授業は，最後まで学生を飽きさせないであろうこと必定，である．

本書の末尾には，著者のアインシュタイン観が易しく優しい言葉で纏められている．少し長いがそれを引用して，小評の結びとしたい．

「物理学における彼の直感力，その中心を見失わずに深く広く探索する能力はすばらしいものです．彼は進むべき目標を定めると，途中でわき道へそれたり，放棄したりしたことはめったになかったようです．……

しかし彼は余分なことにこだわらないという不思議な芸当もやってのけています．……このような芸当はふつうのひとには不可能に近いでしょう．

余計なことを考えずに，自分の考えにしたがってひた走ることができるのは，若いひとの特長でもあります．しかしそのために失敗するひとも多いので，これは大きな冒険をふくむ事柄です．アインシュタインはあぶない橋を渡ったのか，それができたのは，やはり彼が天才だったからなのか，いろいろ考えさせられます．」

亀淵 迪（筑波大学名誉教授）

確率的情報処理と統計力学

様々なアプローチとそのチュートリアル

第9回　●リレー連載●

統計力学の技法を用いたパケット流の制御

堀口　剛

1. はじめに

本リレー連載は今回が9回目になる．確率的情報処理のいろいろな問題に対して統計力学の技法が非常に有用であることがこれまでの解説でも明らかにされてきたと思う．今回はパケット流のルーチング制御に関して統計力学の技法を用いた方法についての紹介を行う．

昨今においては，インターネットを初めとするコンピュータネットワークを利用しての情報の交換と共有はその重要性を益々増している．近未来のユビキタスネットワーク社会においては，高速情報通信ネットワーク網のインフラストラクチャーの整備とともに，パケットの送受信に対して信頼性が高く効率のよいルーチング制御などが必要である．パケット数が増加するとパケット流に渋滞（輻輳）が発生するので，コンピュータネットワークの内部に存在する複数の（目的地への）送信経路の中から最適な経路を探し出し，渋滞を回避させてパケットを効率よく目的地へ送信するように制御することも重要である．このためには，高信頼性と高効率性を保障するルーチング制御を可能にする確率的数理モデルの構築や渋滞発生のメカニズムの解明，並びに渋滞回避のための輻輳制御などの研究は重要な課題である．また，WWWやインターネットなどのネットワークが複雑ネットワークであり，その特徴はスケールフリーネットワークであることが近年の研究で判明してきた．したがって，コンピュータネットワークがスケールフリーネットワークへ自己組織化していくメカニズムの解明も重要な課題である．これらの研究課題に対して，統計力学は非常に有用な研究手法や解析技法を提供してくれる．今回は特にパケット流のルーチング制御について，確率的数理モデルの構築の仕方の1つの例を説明し，そのモデルに統計力学の技法がどのように用いられるかを紹介する．

2. パケットのルーチング制御モデル

コンピュータネットワークのような通信ネットワークを通してコンピュータ間での情報の送受信を行う場合，情報の送受信を行うための手続きを通信プロトコルと言う[1~5]．通信プロトコルの体系化されたものをネットワークアーキテクチャと言う．ネットワークアーキテクチャの標準化されたものにOSI参照モデルやTCP/IP参照モデルというものがある．OSI参照モデルは7つの層からなっていて，特に第3層はネットワーク層と言われていてパケットの制御に関する層である．こ

の層はTCP/IP参照モデルではインターネット層に対応している．この層の仕事はIPパケットを目的地ノードに送信することであるので，パケットのルーチングを効率よく行うように設計する必要がある．

この解説では，通信プロトコルの詳細には触れずに，パケットの送受信を効率よく行うルーチング制御について確率的数理モデルの1つの例を説明する．現在のように非常に沢山のコンピュータが分散型結合をしているコンピュータネットワーク（体系）に対しては，適応的な分散処理による最適なパケットの送受信のための制御が必要である．このような体系において，効率のよいルーチング制御を行うためには統計力学の技法が非常に有用である．

分散型コンピュータに対してのこれまでのルーチング制御について簡単に振り返ってみる．初めに，Baran[6]により有効的なパケットスイッチング技術の必要性が議論された．その後，適応的なトラフィック制御に必要なルーチング制御や，なかなか目的地に到達しないパケットに対するショートカット制御など，いろいろな方法が提案されている[7~10]．パケットのルーチング制御においては，例えば，渋滞が発生した場合には，少し遠回りをしてでも渋滞を回避したほうが効率がよいことから分かるように，目的地ノードまでの最短経路を探すのが常に最適な制御であるとは必ずしも言えない．いくつかの要因のトレードオフにより，最短経路以外の経路を探して最適なルーチング制御を行う必要がある．そのためには人工ニューラルネットワークを用いた制御方法が優れていると考えられる．このため，人工ニューラルネットワークを用いたパケットの最適なルーチング制御の数理モデルが多くの研究者により提案されている[11~14]．人工ニューラルネットワークはいろいろな最適化問題に適用されて，統計力学の技法を用いて成功を収めてきた[15,16]．パケットのルーチング制御も最適化問題の1つと見なせるので，柔らかい制御を可能にするために統計力学の技法を用いて，適当な温度ノイズを導入することにより効率のよい制御が可能になることが期待される．この解説では，Kurokawaら[14]のモデルの拡張として，統計力学の立場からHoriguchiとIshioka[17]により提案されたパケット流の確率的数理モデルを用いて，ルーチング制御について説明を行う．

コンピュータネットワーク上のパケットのルーチング制御モデルにおいて，体系はノード，コネクション，プロセスからなっていると考える．ここでは，ワークステーションやパーソナルコンピュータなどをノードであるとする．ノード間の通信回線がコネクション（以下では単にリンクと言う）であり，ノード内で処理を実行する主体がプロセスであるとする．プロセスに対して人工ニューラルネットワークを用いて確率的数理モデルを導入する．すなわち，各ノード内に人工ニューラルネットワークを配置する．各ノードにはそのノードから出ているリンクの数だけニューロンがあるものとする．図1にその簡単な例を示した．6個のノードが存在して，各ノード内には人工ニューラルネットワークを配置してある．ノード3を例にして図1の右上の大きな円の中に示してある．このコンピュータネットワークの場合には，ノード1，ノード2，ノード4，ノード6には各々3個のニューロンからなる人工ニューラルネットワークがあり，ノー

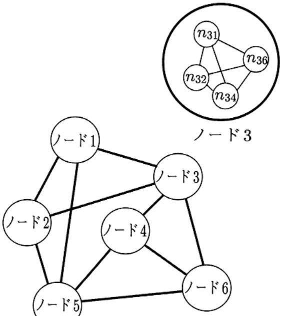


図1　コンピュータネットワークの説明．各ノード内に人工ニューラルネットワークを配置する．右上にノード3の内部の人工ニューラルネットワークを例として描いてある．

ド 3，ノード 5 には各々 4 個のニューロンからなる人工ニューラルネットワークがあることになる．

パケットのルーチング制御を行う確率的数理モデルとして次のように仮定する．各ニューロンはそのノードがリンクで結合されている他のノードへのパケットの送信を制御するものとする．リンクは全 2 重であるとする．各ノードにはバッファが存在して，そのノードは指定されたバッファを超えてパケットを保持できないものとする．数値シミュレーションを行うときは，ノードをランダムに選択して，選択されたノードに 1 個のパケットを置く．各パケットは目的地ノードを持っているものとする．目的地ノードもランダムに付与することにする．この手続きは決められたパケット数に達するまで行う．各ノードは 1 時間ステップにおいて，高々 1 個のパケットをリンクを通して他のノードに，目的地ノードにできるだけ近くなるように送信し，また各ノードはできるだけパケットを貯めないように作動するものとする．

上述のような仮定の下で確率的数理モデルのエネルギー関数を定義する．ノードの集合を $\Lambda = \{i\}$ とする．ノード i に N_i 個のニューロン $\{n_{ij}\}$ があるとする．エネルギー関数は次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
E = & \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{k}\sum_{l} J_{ik,il} s_{ik} s_{il} \\
& - \eta \sum_{i}^{N}\sum_{l}\left\{1 - \frac{1}{b_l}\left(q_l + \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} s_{jl}\right)\right\} s_{il} \\
& - (1-\eta)\sum_{i}^{N}\sum_{l}\left(1 - \frac{d_{l,g_i}}{d_c}\right) s_{il} \\
& + \xi \sum_{i}^{N}\left(\sum_{l} s_{il} - 1\right)^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで，N は全ノード数であり，$s_{ij} \in \{0,1\}$ はニューロン n_{ij} の取りうる状態を表す変数である．$s_{ij} = 1$ の場合には，ノード i にある待ち行列のトップにあるパケットがノード j へ送信される．$J_{ik,il}$ はニューロン n_{ik} と $n_{il} (k \neq j)$ の相互作用パラメータであるが，ここでは簡単のために $J_{ik,il} = 1$ を仮定する（$J_{ik,il}$ を変数として扱い，動的に変化するパケットの送受信の環境情報を $J_{ik,il}$ に学習させることにより効率のよいルーチング制御が可能であるという研究がある）．すなわち，このモデルにおいては，各ノード内のニューロンは全結合をしていると仮定していることになる．この仮定の下では，第 1 項はどのノード i に対しても，$s_{ik} = 0\ ({}^{\forall}k)$ となるように働く．これでは無意味な答えしか与えないのでパケットの送信に関する制約条件を付与する必要がある．パケットの送信が適切になされるための条件が第 2 項と第 3 項である．b_l はノード l でのバッファサイズを表し，q_l はノード l に既に存在するパケット数を表す．$\sum_{j \neq i} s_{jl}$ はノード l にノード i 以外のノードから送信されてくるパケット数である（1/2 は対称性のために付与された因子である）．したがって，第 2 項は各ノードにおけるパケット数を減少させようとする働きがある．d_c は体系の特徴的なリンク数である．d_{l,g_i} はノード i にある待ち行列のトップにあるパケットのノード l からの目的地ノード g_i までの距離を表す．このため，第 3 項はノード i にある待ち行列のトップにあるパケットをその目的地ノードまで最短距離で送信しようとする働きがある．第 2 項と第 3 項はパケットを効率よく送信させることに関してトレードオフの関係にある．$\eta\ (0 \leq \eta \leq 1)$ はトレードオフの強さを決めるパラメータである．第 4 項は各ノード内で発火するニューロンの数を 1 つに制限するための束縛条件を表す．ξ はその強さを表すパラメータである．

このように定義されたエネルギー関数をもとにして，動力学を導入して時間発展方程式を導き，パケットの送受信を行うことができる．すなわち，動力学に従って s_{il} を計算し，$s_{ij} = 1$（発火状態）か $s_{ij} = 0$（休止状態）かを判定するのである．これは最適化問題の 1 つであると考えることができる．最適化問題では，局所的極値よりは大局的極値（この場合は最小値）を求めることが要求される．しかし，エネルギー関数はランダムパラメータを含む関数であり，従来の単純な反復計算方法

では望ましい最小値を得ることが難しい．そのため，そのような最適化問題には，統計力学の枠組みを用いて温度ノイズを導入して反復計算を行う技法が効率よく最小値を得るのに適していることがいろいろと議論されてきている[15,16,18]．すなわち，s_{ij} の熱平均値，$\langle s_{ij}\rangle$，

$$\langle s_{ij}\rangle = \frac{1}{Z_N}\sum_{\{s_{ij}\in\{0,1\}\}} s_{ij}e^{-\beta E} \tag{2}$$

を計算する．ただし

$$Z_N = \sum_{\{s_{ij}\in\{0,1\}\}} e^{-\beta E} \tag{3}$$

は分配関数である．ここで，$\beta = 1/kT$ である．T は統計力学では絶対温度であるが情報処理に関する問題の場合はソフトな制御を可能にするノイズパラメータである．この結果から，閾値を θ として，$\langle s_{ij}\rangle > \theta$ のとき $s_{ij}=1$ とし，$\langle s_{ij}\rangle \le \theta$ のとき $s_{ij}=0$ とするのである．しかし，ノードの数 N が大きくなると式 (2) の計算量が膨大になる．そのために，ここでは分子場近似を導入する[18]．分子場近似も情報処理の問題に適用される統計力学の重要な技法の 1 つである．いま，N_{n} を体系のニューロンの総数とすると，式 (2) において $\{\langle s_{ij}\rangle\}$ を求めるためには $\mathcal{O}(2^{N_{\mathrm{n}}})$ の計算が必要であるが，分子場近似を用いると $\mathcal{O}(N_{\mathrm{n}})$ の計算で済むことになる．

分子場近似でのエネルギー関数は，次のように表すことができる[18]．

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{mf}} &= \frac{1}{2}\sum_i^N\sum_k\sum_l J_{ik,il}v_{ik}v_{il}\\ &\quad -\eta\sum_i^N\sum_l\left\{1-\frac{1}{b_l}\left(q_l+\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}v_{jl}\right)\right\}v_{il}\\ &\quad -(1-\eta)\sum_i^N\sum_l\left(1-\frac{d_{l,g_i}}{d_c}\right)v_{il}\\ &\quad +\xi\sum_i^N\left(\sum_l v_{il}-1\right)^2\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，v_{il} は式 (2) で定義されたニューロンの状態の熱平均値 $\langle s_{ij}\rangle$ を分子場近似で求めたものであり，次のように計算される．

$$v_{il} = \frac{1}{1+\exp\{-\beta h_{il}\}} \tag{5}$$

ここで，h_{il} は有効場である．

パケットの送受信は時間の関数としてなされるのであるが，上記のエネルギー関数は時間発展を行わないので，通常は時間発展を何らかの形でアドホックに導入する必要がある．ここでは，勾配降下法により，分子場近似のエネルギーを時間と共に減少させるように時間発展を導入する．v_{il} は時間 t の関数であると仮定すると，h_{il} と E_{mf} も t の関数になる．分子場近似のエネルギー $E_{\mathrm{mf}}(t)$ が時間とともに減少するための条件から有効場 $h_{il}(t)$ の時間微分が満たす式が導かれる[17]．数値シミュレーションを行うときは離散時間で行うので有効場の時間微分を差分に置き換えて計算を行う．その結果として，次の式を得る．

$$\begin{aligned}&h_{il}(t+1)\\ &= h_{il}(t) - \sum_k J_{ik,il}v_{ik}(t)\\ &\quad +\eta\left\{1-\frac{1}{b_l}\left(q_l+\sum_{j\neq i}v_{jl}(t)\right)\right\}\\ &\quad +(1-\eta)\left(1-\frac{d_{l,g_i}}{d_c}\right)\\ &\quad -2\xi\left(\sum_k v_{ik}(t)-1\right)\end{aligned} \tag{6}$$

各繰り返し計算の時間ステップにおいて，熱平均値 v_{il} は式 (5) と (6) を用いて求める．ニューロン n_{il} が発火するかしないかは閾値 θ で決める．すなわち，ニューロン n_{il} は $v_{il}\ge\theta$ のとき発火状態にあり，$v_{il}<\theta$ のとき休止状態にあるとする．ここでは，閾値として $\theta=0.9$ を用いる．予備的な数値シミュレーションで各ノード当たり 15 回から 20 回の繰り返し計算で 1 つのニューロンが発火するという結果が得られた．次の節で示すデータは，各々の数値シミュレーションにおいて，各ノード当たり 30 回の繰り返し計算を行って得られた結果である．ニューロン n_{il} が発火したとき，ノード i の待ち行列のトップで送信を待って

いるパケットがノード l に送信されることになる．

3. 数値シミュレーション

前節で提案したモデルに対して，パケットの送信の数値シミュレーションを行った例を示す．数値シミュレーションを行う設定をまとめると次のようになる．

数値シミュレーションの設定

1. 各ノードは有限長のバッファを持ち，パケットはバッファへ FIFO (First–In–First–Out) の構造で蓄積される．各ノード内ではそれに接続している各リンク当たり1つのニューロンが対応し，1時間ステップ当たりただ1つのパケットを処理する．
2. リンクの物理的な長さは考えず，すべてのリンクの長さは等しいとする．隣接するノード間を移動するパケットの移動速度はすべて等しいとする．リンクは全2重であるとする．
3. 各ノードは，ノード内のすべてのニューロンの出力値，隣接するノードの待ち行列数，送信予定のパケットの隣接ノードから目的地ノードまでに残されている最短距離などの情報を保持する．
4. コンピュータネットワーク上に一定数のパケットを発生させて，パケット数は常に一定に保つ．パケットを発生させるノードとパケット発生時にパケットに割り当てる目的地ノードはランダムに決定する．パケットはバッファが一杯のノードには，ニューロンが発火しても送信しないことにする．パケットはその目的地ノードに到着した場合には消滅するものとする．

数値シミュレーションを行うに当たって，バッファサイズはすべてのノードに共通に $b_i = 50$ として，$\beta = 2.0, \xi = 0.1$ と選んだ．トレードオフのパラメータ η の値は 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 とした．数値シミュレーションで観測したいろいろな量のうちで，ここでは目的地ノードに到着したパケット数 N_a をコンピュータネットワーク上に存在するパケット数 N_p の関数として求めた結果のみを例として示す．N_a はスループット（単位時間当たりの処理能力）に対応する．コンピュータネットワークのトポロジーには，いろいろなものがあるが，ここでは正方格子状のコンピュータネットワークとスケールフリーネットワーク状のコンピュータネットワークを考える．正方格子状のコンピュータネットワークとしては 13×13 の正方格子を考え，各格子点にノードがあり，リンクは最近接ノード間と次近接ノード間に張られているものと想定する．数値シミュレーションを行った結果を図2に示す．

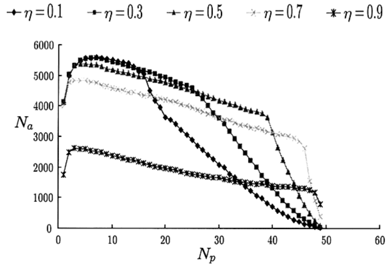


図2 正方格子状のコンピュータネットワークにおけるスループットの例（文献25)より）．

この結果からトレードオフパラメータ η の値によって N_a の様子が大分異なることが見て取れる．η の値が小さいときは目的地ノードまでの距離を小さくする制御が優先され，η の値が大きいとパケットの少ないノードへの送信が優先される．したがって，小さな η の値に対しては渋滞が起こりやすいことが分かる．しかし，渋滞が起こらない場合（コンピュータネットワーク上に存在する全パケット数が少ない場合）にはスループットが大きくなっている．一方，η の値が大きくなると渋滞は発生しにくいが，スループットは小さくなっている．このように，提案したモデルにおいてパケットの送受信が上手く機能していることが分かる．

次にスケールフリーネットワークを考える．ス

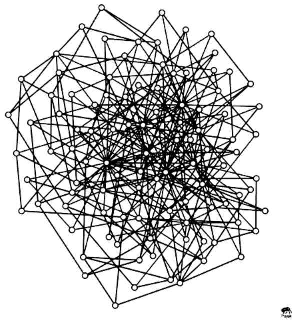


図3　BAモデルにより生成されたスケールフリーネットワークの例（文献26）より）.

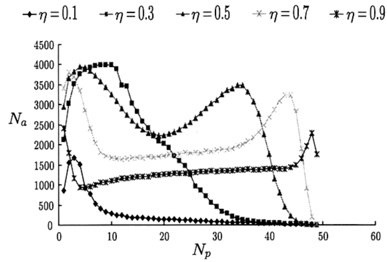


図4　スケールフリーネットワーク状のコンピュータネットワークにおけるスループットの例（文献26）より）.

ケールフリー構造を持ったネットワークとは，ノード i の度数（ノード i から出ているリンクの数）を k_i とすると，k_i の分布（度数分布 $p(k)$）がベキ分布になっているネットワークのことである[19~22]．よく知られたスケールフリーネットワークを作る方法として，バラバシとアルバートによって提案されたBAモデルがある[23]．初めに互いにリンクされていない M_0 個のノードを置く．次に，各ステップ毎に新たに M 本のリンクを持った1つのノードを加える．加えたノードが持つ M 本のリンクは既に存在しているノードとそれらの持つリンク数に比例した確率で結ぶ．このようにして作られるネットワークはステップ数が t において (M_0+t) 個のノードと tM 本のリンクを持ち，リンクの度数分布がベキ分布になることが知られている．$M=M_0=3$ として $N=100$ になるように作ったネットワークの例を図3に示す．

丸はノードを表し，その内部にリンク数に対応したニューロンがある．各ノードに人工ニューラルネットワークがありパケットの送信を制御している．図4に数値シミュレーションで得られたスループット N_a を N_p の関数として示してある．

この結果から，スループットは η の値により複雑な振舞いをしていることが分かる．これは，スケールフリーネットワークの特徴であるハブノードが存在するためである．詳しい分析は文献26）にあるので，ここでは紙面の都合で省略する．

2つの例から分かるように，得られた結果は η の値に大きく依存している．また，η の値が小さいと渋滞が発生しやすく，η の値が大きいとスループットが小さい値になっている．渋滞が発生しにくく，スループットも大きくするためには，η の値が各々のノードの周りの環境と時間ステップに依存するように，η の値に学習させるとよい．このためには強化学習[24]が有効であることが議論されて，その結果，渋滞が回避されスループットも大きくなったという報告がなされている[26]．

4. おわりに

今回は，コンピュータネットワーク上でのパケット流の制御に関して，統計力学の技法が有用であることを1つの確率的数理モデルを用いて説明した．統計力学は構成要素の数がある程度以上大きな体系に対して，その構成要素間の関係が非線形な場合に有用であるいろいろな解析技法を提起してくれる．情報処理のいろいろな問題を統計力学的な観点から見直し，統計力学の技法を用いることにより，従来法よりも効率のよい処理が可能であると考えられる．

今回のテーマについては，ネットワークの設計という問題も重要な一つの課題である．実際，ここで提案した確率的数理モデルを用いて，バッファの

分布をランダムにして大きなバッファを持つノードが目的地ノードになりやすいようにパケットを発生させるという設定の下で，パケットをできるだけ効率よく目的地ノードに到着させるようにコスト関数を定義することにより，スケールフリー的なネットワーク構造を持ったコンピュータネットワークを構築できることが最近の研究で明らかになった[27]．

参考文献

1) 岡田：『情報ネットワーク』，培風館 (1994).
2) 白鳥，滝沢：『分散処理』，丸善 (1996).
3) 白鳥，水野，高橋，佐藤：『コンピュータネットワーク』，オーム社 (1997).
4) D.E. Comer 著，水野他訳：『コンピュータネットワークとインターネット』，ピアソン・エジュケーション (1998).
5) A.S. Tanenbaum 著，水野他訳：『コンピュータネットワーク（第 3 版）』，ピアソン・エデュケーション (1999).
6) P. Baran, On distributed communications networks, *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol.**COM-12**, pp.1–9 (1964).
7) A.G. Greenberg, B. Hajek, Deflection routing in Hypercube networks, *IEEE Trans. Commun.*, vol.**40**, pp.1070–1081 (1992).
8) S.P.M. Choi, D.-Y. Yeung, Predictive Q-routing: A Memory-based reinforcement learning approach to adaptive traffic control, in *Advances in Neural Information Processing Systems 8*, D.S. Touretzby, M.C. Mozer and M.E. Hasselmo, eds., pp.945–951, MIT Press (1996).
9) A. Feldmann, J. Rexford, R. Cáceres, Efficient policies for carrying web traffic over flow-switched networks, *IEEE/ACM Trans. on Networking*, vol.**6**, pp.673–685 (1998).
10) H. Yokota, M. Forsberg, T. Asami, Extension to weighted round robin packet scheduling for variable-length packet networks, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.**E82-D**, pp.668–676 (1999).
11) H.E. Rauch, T. Winarske, Neural Networks for routing communication traffic, *IEEE Control Syst. Magazine*, pp.26–30 (1988).
12) I. Iida, A. Chugo, R. Yatsuboshi, Autonomous routing scheme for large scale network based on neural processing," *Proc. of the IEEE International Conf. on SMC*, pp.194–199 (1989).
13) M.K.M. Ali, F. Kamoun, Neural networks for shortest path computation and routing in computer networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.**4**, pp.941–954 (1993).
14) H. Kurokawa, C.Y. Ho, S. Mori, The neural network approach to a parallel decentralized network routing, *Neural Networks*, vol.**11**, pp.347–357 (1998).
15) J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer: Introduction to the Theory of Neural Computation, Addison-Wesley (1991).
16) P. Peretto: An Introduction to the Modeling of Neural Networks, Cambridge University Press (1992).
17) T. Horiguchi, S. Ishioka, Routing control of packet flow using neural network, *Physica A*, vol.**297**, pp.521–531 (2001).
18) 堀口，佐野：『大学院情報理工学 2，情報数理物理学』，講談社 (2000).
19) A.-L. Barabási 著，青木訳：『新ネットワーク思考—世界のしくみを読み解く』，NHK 出版 (2002).
20) 増田，今野：『複雑ネットワークの科学』，産業図書 (2005).
21) S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes: Evolution of Networks- From Biological Nets to the Internet and WWW, Oxford University Press (2003).
22) R. Pastor-Satorras, A. Vespignani: Evolution and Structure of the Internet-A Statistical Physics Approach, Cambridge University Press (2004).
23) A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random network models, *Science*, Vol.**286**, pp.509–512 (1999).
24) R.S. Sutton, A.G. Barto 著，三上，皆川訳：『強化学習』，森北出版 (2000).
25) T. Horiguchi, Spin models for packet routing control in computer networks, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, No.**157**, pp.205–212 (2005).
26) T. Horiguchi, K Hayashi, A. Tretiakov, Reinforcement learning for congestion-avoidance in packet flow, *Physica A*, vol.**349**, pp.329–348 (2005).
27) J. Ohkubo, T. Horiguchi, Scale-free property of optimal network for packet flow by a packet routing control, *Physica A*, vol.**353**, pp.649–660 (2005).

（ほりぐち・つよし，東北大学工学部）

計算神経科学への招待

脳の学習機構の理解を目指して

第5回

小脳と内部モデル

銅谷 賢治

5.1 はじめに

前回解説した教師あり学習の枠組みは，工学的には音声や画像のパターン識別や，気象や経済の時系列予測など様々な分野で応用されている．教師あり学習は脳にとってもやはり有用なはずであるが，その場合大きな問題になるのは，脳への教師信号はどこから来るのか，という点である．例えば視覚系の学習で，これはイヌですよ，とかネコですよ，とか明示的な教師信号が与えられることは自然界においては稀なことであろう．また運動学習で，仮に先生から手本を示してもらったとしても，そのときの脳から筋肉への出力パターンは普通わからない．そもそも脳内に教師信号がもしあるのなら，もう問題は解けてしまっているのだから学習など必要ないかもしれない．

脳の学習で教師あり信号が最も有用と考えられるのは，脳をとりまく身体や環境の入出力特性を教師として，その予測モデルを脳内に獲得すること，つまり「内部モデル」の学習である[1,2]．例えば腕の筋肉にある指令を送ると腕の関節角はどう変化するか，また腕の関節角をある値に取ると手先は視覚空間のどこに届くか，などの予測は運動の計画や制御では非常に有用である．これらは，身体や環境の因果的な特性を表すものであり，一般に「順モデル」と呼ばれ，運動指令を入力信号，その結果の感覚を教師信号として，教師あり学習の枠組みで獲得することができる．

もうひとつ，脳で教師あり学習が有用なのは，当初はフィードバックや反復計算など時間をかけて計算した結果を，一種の早見表として記憶しておくことである．新しい運動を学習するとき，はじめは意識的でぎくしゃくとした動きが，何度も練習を繰り返すうちに滑らかな動きが無意識的にできるようになる．その背後には，感覚情報を適切な運動情報に即座に変換する回路の学習があり

そうである．この場合の変換は，ある目標とする状態を実現するために必要な運動を決定するという一種の逆問題であり，このような回路は，身体や環境の「逆モデル」と呼ばれる．

脳の中で，このような「順モデル」や「逆モデル」の学習は，どこで，どのように行われているのだろうか？ その最大の候補は，小脳である．以下その回路構造とシナプス可塑性，それに基づく理論モデルについて見ていこう．

5.2 小脳の構造と神経回路

小脳は後脳の一部が張り出してできたものであり，その起源は脳の歴史の中でも古い．しかしそのすべてが古いわけではなく，進化に伴い中心部から左右に向けて拡張されて来た．図 5.1 は小脳を後から見た構造の概略である．サルやヒトの小脳は，左右方向の深い溝により 10 枚の小葉に別れている．またその入出力先により中央から左右に向けて，虫部，中間部，外側部，さらに一番下の片葉とに区分される．片葉は眼球運動を司る前庭核に投射することから「前庭小脳」，虫部，中間部は，その主な出力を脊髄に向けて送るため「脊髄小脳」，外側部はその出力を大脳に送るため「大脳小脳」と呼ばれる．特に最近，神経線維を伝わって感染するウイルスを使った実験により，小脳外側部の出力は運動野や運動前野だけでなく，頭頂葉や前頭前野にも送られていることが明らかになった[3]．小脳皮質の回路構造はどこをとってもほぼ同じだが，その投射先のバラエティから，反射的な眼球運動から，随意的な四肢の運動，さらに脳内の認知や推論など，様々な目的に関与することが想像できる．

図 5.2 は，小脳の神経回路の概略図である．小脳皮質は，脊髄や大脳からの信号を伝える苔状線維と，脳幹の下オリーブ核からの登上線維という 2 種類の入力を受ける．小脳皮質の入力細胞である顆粒細胞は大脳皮質の全ニューロン数に匹敵するほどの数が多く，それぞれが数本の苔状線維入力を受け，その軸索を小脳の皮質に沿って平行線維として送っている．小脳皮質の出力細胞であ

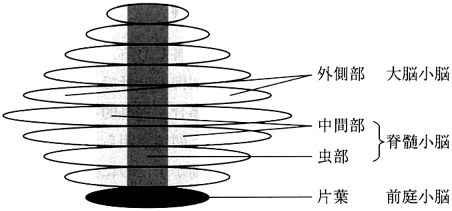


図 5.1　小脳の構造．

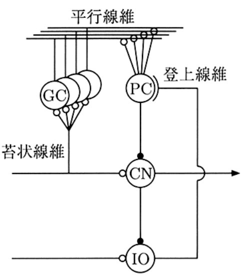


図 5.2　小脳皮質の回路構造（GC：顆粒細胞，PC：プルキンエ細胞，CN：小脳核，IO：下オリーブ核）．

るプルキンエ細胞は，平行線維と直行する平面内に樹状突起を広げ，約 10 万本もの平行線維からシナプス入力を受ける．それとは対照的に，1 個のプルキンエ細胞にはたった 1 本の登上線維から樹上突起に絡みつくように多数のシナプス入力を受け，そのスパイクに対して「複雑スパイク」と呼ばれる幅の広いスパイクを，1 対 1 対応の関係で生成する．プルキンエ細胞の軸索は小脳の付け根に位置する小脳核に伸び，抑制性シナプスを形成する．

5.3 小脳パーセプトロン仮説とシナプス長期減弱

小脳プルキンエ細胞が非常に多数の平行線維入力と，たった 1 本の登上線維入力を受けるという特徴的な構造は，脳の理論研究家の興味をかきたてるものであった．歴史的に最も重要な提案は，Marr と Albus による「小脳パーセプトロン」仮説である[4,5]．彼らは，非常に多数の平行線維からプルキンエ細胞へのシナプス荷重は，たった 1 本の登上線維入力を教師信号としてそれぞれの入力に応じて変化し，パーセプトロン型の学習が行われているという仮説を 60 年代末から 70 年代初めにかけて提案した．この仮説では，非常に多数の顆粒細胞は，苔状線維入力の組合せにより，平行線維出力として高次の基底関数系を構成するために使われる．

この仮説は小脳の実験研究者にも大いに注目され，仮説の検証に向けた実験が行われた．伊藤正男は，頭が動くとそれをキャンセルするように眼球が動く，前庭動眼反射の適応に関わる小脳の回路を精力的に研究し，1980 年代初めに，平行線維入力と登上線維入力の相関に応じたシナプス可塑性が起こることを証明した[6]．ただし，その結果わかった可塑性は，Marr が当初想定したのとは逆に，平行線維と登上線維の同時入力に対して，平行線維シナプスが弱まるという，長期減弱（long-term depression; LTD）という現象であった．

その後，小脳の LTD は瞬き反射など，他の行動でもその学習の基盤になっていることが示されている．パーセプトロンは元来離散的なパターン識別のモデルだが，運動制御においては連続出力の適応フィルターとして見るべきである．藤田昌彦は，前庭動眼反射の学習過程が，小脳の神経回路と平行線維シナプスの LTD により実現できることを計算機シミュレーションにより示した[7]．

5.4 フィードバック誤差学習による逆モデル制御

小脳疾患の典型的な症状は，手足の運動制御の障害である．特に多関節を協調させた高速な運動が困難になる．一方ロボット制御の分野でも，非線形なダイナミクスを持つ多関節ロボットアームを動かす場合，古典的なフィードバック制御では高速で正確な動きは実現できないという問題が明らかになった．そこで考えられたのは，アームを目標軌道に沿って動かすために必要な関節トルクを，予めアームの運動方程式をもとに計算して与えるフィードフォワード制御法である．川人光男は，小脳が多関節の高速な運動を可能にしているのは，小

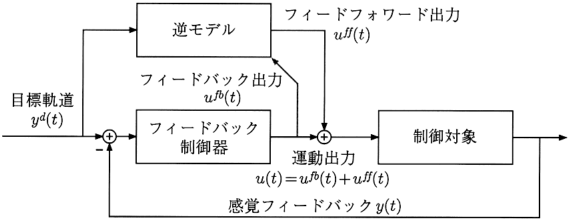


図 5.3　フィードバック誤差学習.

脳が腕の運動方程式に相当するものを学習し，フィードフォワード制御を可能にしているからではないかと考えた[8]．この場合，学習すべき関数は，腕の目標軌道に対してそれを実現するために必要なトルクを与える，腕のダイナミクスの逆モデルである．このような逆変換に必要な教師信号は，いかにして小脳に与えられるだろうか？

一般に逆モデル学習では，逆変換が存在するか，存在するとして一意に決まるか，という不決定性の問題がある．川人は，フィードバック制御回路の出力が逆モデル学習の擬似的な誤差信号として使えることを発見し，フィードバック誤差学習制御方式を提案した[8]．図 5.3 はその構成であり，目標軌道 $y^d(t)$，実際の状態 $y(t)$ に対して，制御出力は

$$u(t) = u^{fb}(t) + u^{ff}(t) = K(y^d(t) - y(t)) + g(y^d(t); w) \tag{5.1}$$

により与えられる．ここで, K はフィードバック制御のゲイン行列, $u = g(y; w)$ は軌道 y を実現するために必要な制御出力 u を計算する逆モデル，w はそのパラメタを表す．逆モデルの学習は，α を十分小さい学習係数として，

$$\frac{dw}{dt} = \alpha \frac{\partial g}{\partial w}^T u^{fb}(t) \tag{5.2}$$

により行われる，このフィードバック誤差学習回路は，逆モデルの学習が進むにつれ出力誤差が減少し，フィードバック制御器の寄与分が自動的に減少するという巧妙な設計になっている．

一般にフィードバック制御器の出力には遅れがあるし，局所線形的に計算されるものだが, 小脳回路はその時間遅れを補正した上で補間することにより，大域的な非線形関数として逆モデルを学習する．フィードバック誤差学習は，当初は産業用マニピュレーターの制御に始まり[9]，時間遅れによりフィードバック制御の難しい空気圧人工筋肉を使ったロボットアームの制御，現実的な非線形性とフィードバック時間遅れを考慮したヒトの腕のシミュレーション[10]などで，その有効性が検証されている．川人はこの学習方式を，小脳と脊髄，大脳皮質の解剖学的な回路構造から発想したが，その有効性は制御理論の分野からも注目され，適応制御系としての解析も進められている[11]．

5.5 順モデルによる予測制御

フィードバック誤差学習で形成されるような逆モデルは，実時間の運動制御では非常に重要である．では，順モデルのほうはどうであろうか？ Miall らは，化学プラントなど大きな時間遅れを持つ制御系で用いられる Smith 予測器という手法に着目した[12]．これは，制御対象の時間遅れのない予測モデルに対してフィードバック制御を行い，その出力のコピーを実際の制御対象に出力するという制御方式である．このような予測的な制御は，大脳皮質と小脳外側部のフィードバック回路で，小脳外側部が順モデルを，大脳運動野がフィードバック制御器を構成し，小脳順モデルからのフィードバックにより計算された出力を脊髄に送る，という形で実現することが原理的には可能である．

Smith 予測器による制御は，下手なフィードバックをかけなければそれ自体は安定なシステムを想定したものであり，例えば姿勢制御など不安定系の制御には使えない．より一般的な制御方式としては，順モデルをもとに Kalman フィルターを構成し，遅れやノイズを含むフィードバック情報から，環境の現在の状態を推定し，フィードバック制御に用いるという手法が考えられる．Schaal らは，手のひらの上に立てた棒を倒さないように制御するという典型的な不安定系の制御課題を被験者に行わせ，視覚フィードバックを一時的に遮断しても制御を続けられること，またその間にはフィードバックゲインが低下することから，Kalman フィルターのような状態予測器を使った制御が行われていることを示した[13]．このような順モデルを用いた状態推定が小脳を中心とした回路で実現されている可能性は十分に考えられるが，Kalman フィルターで必要な共分散行列の更新やフィードバックゲインの調節がいかに行われているかは，未解決の課題である．

逆モデルを使ったフィードフォワード制御が，運動指令を直接計算する手法なのに対し，順モデルを使った制御は，モデルによる身体や環境の状態の実時間予測を行いながら，その予測値に応じて運動出力を計算するという間接的な手法である．そのどちらが優れているかは，制御課題や学習条件に依存する．時間的制約の強い制御課題ではより直接的な逆モデル制御が有効であろう．一方順モデル制御では，環境や目的に応じて異なる順モデルとフィードバック制

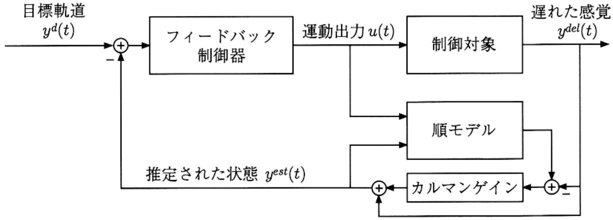


図 5.4 順モデルとカルマンフィルターによる状態推定フィードバック制御．

御器を組み合わせることにより，新たな状況により柔軟に対応できる可能性がある．

5.6 内部モデルによる認知機構

順モデルによる予測は，運動制御だけでなく感覚認知においても，自分の行動の結果予測される感覚を基準として実際の感覚入力から差し引くことにより，より高度な知覚を行うことを可能にする．例えば，くすぐったいという感覚は，同じ物理刺激でも人にくすぐられるのと自分でくすぐるのでは大きく違う．Blakemore らは，fMRI 用のくすぐり装置を開発し，手のひらを自分でくすぐった場合と，他人にくすぐられた場合の脳活動を比較した[14]．その結果，体性感覚野だけでなく小脳で，自分でくすぐったときにはくすぐられたときよりも活動が下がるという，感覚に対応した応答が見られた．統合失調症の症例として，自分で自分をくすぐってもくすぐったく感じることが知られているが，Blakemore らは，順モデルによる自分の行動結果の予測の障害が，統合失調症に特有の幻聴などの症状につながるという仮説を提案している．

5.6.1 脳内シミュレーションと思考

前節では，自分の腕や棒など，身体や環境の現在の実際の状態を推定するために順モデルを用いることを考えたが，順モデルはそれだけでなく，身体や環境の架空の状態の変化を予測する，いわば脳内シミュレーションのために用いることも可能なはずである．もちろん実世界と切り離されたシミュレーションは，予測誤差が累積してとんでもない答えを出す危険性はあるが．

実際 fMRI による脳活動計測実験で，手の運動だけでなく道具の使用など，様々なイメージ操作の課題で小脳外側部とその出力を受ける運動前野や頭頂葉の活動が報告されている[15,16]．

さらに順モデルによるシミュレーションは，自分の行動に対する相手の応答の予測，さらには相手の脳内の状態の変化の予測にも原理的には使えるはずである．目に見えない環境や相手の状態を仮想し，シミュレートする能力は，言語によるコミュニケーションの基盤をなすものである[17,18]．相手の心の状態を推定する能力は，近年「心の理論」と訳される “theory of mind” というキーワードのもと，注目を集めている．Frith らは，前帯状回など大脳皮質とともに，小脳も相手の内的状態に関与するという fMRI 実験結果を報告している[19]．

5.6.2 計算結果のモジュール化

脳の内部モデルが学習する対象として，ここまで自分の身体や環境，他の個体を考えてきたが，脳の並列的な構造を考えれば，脳のある部分の働きを他の部分がモデル化する，つまり脳の脳内モデルを考えることができる．例えば，当初は脳内の複数の回路を組み合わせたり，反復演算をして答えを出していた処理があったとすると，その複雑なプロセスの結果として得られた入出力関係を記憶しておけば，次に似たような問題に直面したときに時間とエネルギーの大きな節約になるはずである．

大脳小脳，つまり小脳外側部は，そのような脳内処理の内部モデルを学習させるには非常に好位置にいる．初めは試行錯誤的，意識的に行っていた運動が，反復練習をするにつれて流暢で無意識的な運動に変化するというのは，スポーツの練習や外国語の習得ではよくあることである．実際，彦坂興秀らはサルの系列運動学習の実験で，当初は試行錯誤的に学習された系列が，高速に予測的に行われるようになった段階では，小脳に強く依存することを明らかにしている[20]．

5.7 内部モデル学習に必要な回路機構

5.7.1 平行線維入力の基底関数表現

平行線維からプルキンエ細胞へのシナプス可塑性により十分な学習が行われるためには，入力である平行線維に，出力を構成するために十分な情報が含まれている必要がある．数学的に言えば，出力関数を実現するために必要な基底関数が揃っていること，さらに学習の効率を考えると，それらがなるべく重なりの少ない疎な（sparse）基底であることが求められる[4,5]．最近の麻酔下のラットの顆粒細胞内からの記録により，顆粒細胞の定常発火頻度は 0.5 ヘルツ程度と低いこと，2 発以上の連続するシナプス入力に対してバースト状に応答することが明らかにされた[27]．このシナプス入力が単一の苔状線維のものか，複数の苔状線維入力によるものかは明らかでないが，後者の場合，苔状線維入力の統合によるスパース基底の構成という，Marr らの仮説を支持するものである．

Schweighofer らは，顆粒細胞とゴルジ細胞のネットワークが，情報量最大化と出力のスパース化という目的の下に自己組織的な学習を行うモデルを提案し，腕の制御課題のシミュレーションでその有効性を示した[21]．

5.7.2 登上線維の誤差表現

教師あり学習が正しく進むためには，当然のことながら正しい教師信号，あるいは誤差信号が必要である．小脳学習仮説では，下オリーブ核からの登上線維が誤差信号を送ることが想定されているが，これにはいくつかの疑問も投げかけられている．一つは，登上線維のスパイクは非常に発火頻度が低く，通常 1～2 Hz，最高でも 10 Hz 程度であり，その応答は試行ごとに大きくばらつく．このような低い発火頻度でばらつきの大きいスパイクで，素早い運動に必要な教師信号を送ることができるのか，というのが一つの問題である．さらに，下オリーブ核細胞は周囲のニューロンと電気シナプスを形成し，スライス実験では複数のニューロンが同期してリズム的に発火することが示されている．自発的な同期発火では，細かい誤差信号を伝えることはますます困難になりそうである．

設楽，河野らのグループは，追従眼球運動（OFR）中の小脳プルキンエ細胞の活動を記録し，まず，平行線維入力による単純スパイク発火が，眼球の位置，速度，加速度の線形和により良く再現されることを示した．さらに小林らは登上線維入力による複雑スパイクの解析を行い，複雑スパイクも，複数回の試行

の平均を取れば，眼球の位置，速度，加速度の情報を表していることを明らかにした[22]．つまり，登上線維からの低発火頻度の入力は，個々の試行においてフィードバック信号として使えるほどの信頼度はないが，反復試行による学習のために十分な情報を伝え得る．

北澤らはさらに，ネコがスクリーン上のターゲットに手（前肢）で触る到達運動中の，プルキンエ細胞の発火を解析した．その結果，手先がターゲットに到達した後，およびその直前には，複雑スパイク応答，つまり登上線維入力は，手先到達位置の誤差を表すことが明らかになった[23]．さらに興味深いことは，到達運動開始時には，登上線維はターゲットの方向を表す．ではこれは運動指令かと言うと，発火頻度の低さ，試行ごとのばらつきの多さから，そうは考えられない．小脳学習仮説からすればこの運動開始時の応答は，仮にもし何か，運動開始に先立って運動方向の手がかりになるような信号があれば，これをもとにより素早く正確な行動を実現するための，仮想的な誤差信号と解釈することもできる．

試行ごとの発火のばらつきは，低い発火頻度で誤差情報を伝えるためには好都合である．なぜなら，低い発火頻度で連続的な誤差波形を伝達するときに，確定的なダイナミクスでは，毎回同じタイミングでスパイクが生成されてしまい，複数試行にわたって平均を行っても，正しい誤差信号の波形は再現できないからである．Schweighofer らは，登上線維スパイクのばらつきは，電気シナプスにより結合された下オリーブ核ニューロンがカオス的に応答することにより実現され，これにより低発火頻度でもより正確な信号伝達が可能になるという「カオス共鳴」仮説を提案した[24]．その検証のために，これまでに得られた多くの実験データをもとに，下オリーブ核ニューロンのコンパートメントモデルを構築し，2 個のニューロン間の電気シナプス結合の強さによっては，非同期的にスパイクが生成されることを示した．さらに多数のニューロンの結合によりカオス的な振舞いが見られ，またその状態で情報伝達が最大化されることをシミュレーションにより示した[24]．

5.7.3 シナプス可塑性の時間窓

小脳 LTD 仮説の基本は，「平行線維と登上線維の同時入力により，平行線維シナプスが減弱する」というものである．これはどのような細胞メカニズムにより実現されているのだろうか？ また，実際の運動学習での誤差信号は，体性感覚なら 100 ミリ秒，視覚なら 200 ミリ秒ほどの遅れを伴う．つまり平行線維入力 100～200 ミリ秒程度遅れて登上線維入力が来たときに LTD が起こることが，理論的には期待される．

小脳 LTD の分子機構に関して，分子生物学的手法を用いた研究がさかんに行われ，シナプス内のカルシウム濃度の上昇を引き金として，シナプス後膜上のグルタミン性受容体が細胞内に取り込まれるという分子カスケードが明らかにされるに至っている[25]．しかし，このような分子カスケードの図を見ていただけでは，どのような入力の時間関係のときに LTD が起きるのか，予想することは難しい．そこで土居智和らは，平行線維と登上線維入力によるシナプス

内のカルシウムを含む情報伝達系の反応方程式モデルを構成し，計算機シミュレーションを行った[26]．その結果，平行線維入力によりIP3と呼ばれる細胞内伝達分子の濃度が上昇し，細胞内のカルシウムバッファ上のゲート分子を活性化し，その後に来た登上線維によるカルシウムイオンの流入が，自己フィードバック的なカルシウム濃度の上昇を引き起こすことを確認した．この相乗効果は，平行線維と登上線維入力の時間差に依存し，モデルの振舞いは，細胞内カルシウム濃度の測定結果を再現するだけでなく，様々な状況下でのLTD実験の一見矛盾する結果を統一的に説明することに成功した．

5.8 おわりに

以上，小脳は教師あり学習により身体，環境，他者の内部モデル，さらに自分自身の脳のモデルを獲得し，運動制御から感覚認知，思考やコミュニケーションまで，様々な用途に用いられる可能性と，内部モデル学習を可能にする回路機構に関する研究を紹介した．ただし，小脳内部モデルの存在が厳密に証明されているのは眼球運動系など一部に限られており，新たな実験技術と解析手法による検証が待たれている．

参考文献

1) 川人光男．『脳の計算理論』．産業図書，1996.
2) M. Kawato. Internal models for motor control and trajectory planning. *Current Opinion in Neurobiology*, Vol.**9**, pp.718–727, 1999.
3) F.A. Middleton and P.F. Strick. Basal gagnlia and cerebellar loops: motor and cognitive circuits. *Brain Research Reviews*, Vol.**31**, pp.236–250, 2000.
4) D. Marr. A theory of cerebellar cortex. *Journal of Physiology*, Vol.**202**, pp.437–470, 1969.
5) J.S. Albus. A theory of cerebellar function. *Mathematical Bioscience*, Vol.**10**, pp.25–61, 1971.
6) M. Ito, M. Sakurai, and P. Tongroach. Climbing fibre induced depression of both mossy fibre responsiveness and glutamate sensitivity of cerebellar purkinje cells. *Journal of Physiology*, Vol.**324**, pp.113–134, 1982.
7) M. Fujita. Adaptive filter model of the cerebellum. *Biological Cybernetics*, Vol.**45**, pp.195–206, 1982.
8) M. Kawato, K. Furukawa, and R. Suzuki. A hierarchical neural network model for control and learning of voluntary movement. *Biological Cybernetics*, Vol.**57**, pp.169–185, 1987.
9) H. Miyamoto, M. Kawato, T. Setoyama, and R. Suzuki. Feedback-error-learning neural network for trajectory control of a robotic manipulator. *Neural Networks*, Vol.**1**, pp.251–265, 1988.
10) N. Schweighofer, M.A. Arbib, and M. Kawato. Role of the cerebellum in reaching movements in humans. *European Journal of Neuroscience*, pp.86–105, 1998.
11) J. Nakanishi and S. Schaal. Feedback error learning and nonlinear adaptive control. *Neural Networks*, Vol.**17**, pp.1453–1465, 2004.
12) R.C. Miall, D.J. Weir, D.M. Wolpert, and J.F. Stein. Is the cerebellum a Smith predictor? *Journal of Motor Behavior*, Vol.**25**, pp.203–216, 1993.
13) B. Mehta and S. Schaal. Forward models in visuomotor control. *Journal of Neurophysiology*, Vol.**88**, pp.942–953, 2002.
14) S.J. Blakemore, D.M. Wolpert, and C.D. Frith. Central cancellation of self-produced tickle sensation. *Nature Neuroscience*, Vol.**1**, pp.635–640, 1998.

15) T. Hanakawa, I. Immisch, K. Toma, M.A. Dimyan, P. Van Gelderen, and M. Hallett. Functional properties of brain areas associated with motor execution and imagery. *Journal of Neurophysiology*, Vol.**89**, pp.989–1002, 2003.

16) S. Higuchi, H. Imamizu, and M. Kawato. Cerebellar activity evoked by actual tool-use task and tool-use imagery task: An fmri study. *Cortex*, 2005.

17) 春野雅彦・銅谷賢治. ヒト知性の計算神経科学, 第 3 回：小脳, 大脳基底核, 大脳皮質の機能分化と統合. 科学, Vol.**70**, pp.740–749, 2000.

18) D.M. Wolpert, K. Doya, and M. Kawato. A unifying computational framework for motor control and social interaction. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol.**358**, pp.593–602, 2003.

19) J. Grezes, C.D. Frith, and R.E. Passingham. Inferring false beliefs from the actions of oneself and others: an fmri study. *Neuroimage*, Vol.**21**, pp.744–750, 04.

20) O. Hikosaka, H. Nakahara, M.K. Rand, K. Sakai, X. Lu, K. Nakamura, S. Miyachi, and K. Doya. Parallel neural networks for learning sequential procedures. *Trends in Neurosciences*, Vol.**22**, pp.464–471, 1999.

21) N. Schweighofer, K. Doya, and F. Lay. Unsupervised learning of granule cell sparse codes enhances cerebellar adaptive control. *Neuroscience*, Vol.**103**, pp.35–50, 2001.

22) Y. Kobayashi, K. Kawano, A. Takemura, Y. Inoue, T. Kitama, H. Gomi, and M. Kawato. Temporal firing patterns of purkinje cells in the cerebellar ventral paraflocculus during ocular following responses in monkeys II. complex spikes. *Journal of Neurophysiology*, Vol.**80**, pp.832–48, 1998.

23) S. Kitazawa, T. Kimura, and P.-B. Yin. Cerebellar complex spikes encode both destinations and errors in arm movements. *Nature*, Vol.**392**, pp.494–497, 1998.

24) N. Schweighofer, K. Doya, H. Fukai, J.V. Chiron, T. Furukawa, and M Kawato. Chaos may enhance information transmission in the inferior olive. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, Vol.**101**, pp.4655–4660, 2004.

25) M. Ito. The molecular organization of cerebellar long-term depression. *Nature Reviews Neuroscience*, Vol.**3**, pp.896–902, 2002.

26) T. Doi, S. Kuroda, T. Michikawa, and M. Kawato. Inositol 1,4,5-trisphosphate-dependent Ca threshold dynamics detect spike timing in cerebellar Purkinje cells. *Journal of Neuroscience*, Vol.**25**, pp.950–961, 2005.

27) P. Chadderton, T.W. Margrie, and M. Hausser. Integration of quanta in cerebellar granule cells during sensory processing. *Nature*, Vol.**428**, pp.856–860.

（どーや・けんじ，沖縄大学院大学先行的研究事業）

特　集（2005年12月号予告）

現代代数学への誘い

多彩な魅力と新世紀の展望

本体952円

現代代数学の点描	桂　利行
モンスターの生息地を探す	原田耕一郎
表現論の光芒 Hechke 環をめぐる 7 つの物語	庄司　俊明
類体論—代数的数論—ガロアの逆問題	三宅　克哉
数論幾何の発展	加藤　和也
可換環論の最近の発展	渡辺　敬一
代数多様体論	川又雄二郎
量子群と数理物理	三輪　哲二
共形場理論 交錯する多彩な数学	土屋　昭博・山田　泰彦

特　集（2005年10月号）

不確定性原理の新展開

量子測定・量子情報をめぐって

本体952円

不確定性原理の新展開 古い解釈と新しい定式化	小澤　正直
量子場の観測過程	小嶋　泉
量子推定と不確定性原理	長岡　浩司
不確定性原理と標準量子限界	H.P. ユエン
重力波検出の量子限界	細谷　暁夫
量子計算の原理的限界 量子論理のエネルギー・コスト	J.G-バナクローチェ
不確定性原理と量子情報 量子状態推定の視点から	松本　啓史
《連載》計算神経科学への招待　その4	銅谷　賢治
将棋を指すコンピュータの数理　その14	小谷　善行
《研究室の窓》ティックデータが私たちに語りかけるもの 科学と相場の交差点	森谷　博之

編集後記

青梅街道から右の脇道を入り新宿方面に散歩する．人一人見ず，聞こえるは蝉の声ばかり．空一面の鰯雲に一瞬時が止まったかのような初秋の風情．

本号では“0”をとり上げる．数学においては0そのものもさることながら，ある量が0になるということが実に様々なことを表現する．してみると0の持ついろいろな意味合いは，数学や物理を知る程に見出されるものであるといえるのかもしれない．（平勢）

＊　＊

耳学で聞きかじった姓名鑑定で，0という数字はあまり縁起が良くないと知ってちょっと意外に思いました．というのは，0には空とか無だけでなく，無限大という意味もあるわけで，数一文字で人の人生が…などと一喜一憂していたら，何だか0の呪縛にかかってしまったようで変でした．でも，0は一列につなぐと鎖に見えるなあと思って，もっとゾッとした今日この頃です（笑）．（伊崎）

＊　＊

皆さんが0を初めて意識したのは，いつ頃だったのでしょうか？ 私は，小さい頃，父と一緒にお風呂に入りながら，2進法の数え方を叩き込まれたときでした．おかげさまで，片手で31まで数えられるようになりました．理論上，両手で1023まで数えられるハズなのですが，どうも指がつりそうになって，今まで一度も数えたことがありません．しかも今まで役に立った記憶が無かったり….（は）

数　理　科　学　11月号

2005年11月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
秦はるひ

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線

のご案内

ゲノム創薬
個別化医療とゲノムデータマイニング
野村仁 著
A5／152頁／本体1600円

実際のヒトゲノム情報の検索の仕方や，既存薬を具体的な例に取っての創薬の歴史，ゲノム情報を元に研究が進められている最新の創薬などを盛り込んだ，非常に含蓄のある1冊.

情報処理システム入門
［第3版］
浦昭二・市川照久 編
A5／約320頁／予価1800円

時代の流れを考慮し，第1部コンピュータシステムのしくみ，第2部情報処理の基本形，の2部構成とした．分り易く簡潔な解説，見開・2色刷等は前著までの方針を踏襲.

計算理論とオートマトン，言語理論
丸岡章 著
A5／約290頁／予価2500円

本書はオートマトンと言語理論，計算可能性の理論，計算量の理論を解説．図や例題を多く用いて直観的に分かるよう工夫した.

新・コンピュータ解体新書
清水忠昭・菅田一博 共著
A5／256頁／本体1600円

好評を博した前著にインターネットの項目を加え，コンピュータの仕組みを初学者にも「やさしく」「わかりやすく」より自然に理解できるよう図を多用し，丁寧に解説.

ネットワーク利用の基礎
［新訂版］
インターネットを理解するために
野口健一郎著
A5／216頁／本体1850円

本書はインターネットへの接続技術や利用技術の進化・発展を反映することを目的とした．見開き体裁で分かりやすく解説された好個の教科・参考書.

実習Excelによる表計算
入戸野健・柴田博 共著
B5／約200頁／予価1500円

Excelを用いた表計算ソフトを利用するための教科書．基本的な操作から，関数の利用，グラフの作成など，多数の例を用いて解説．さらに，データベースとしての利用法，マクロの作成，アドインソフトの利用など，進んだ利用法も具体的な例を用いて学ぶ.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

統計学テキスト他

統計の基礎
考え方と使い方
ジョンソンほか著／西平重喜・村上征勝共訳／A5／232頁／本体1311円
身近な例を中心に図と言葉でやさしく解説した．

統計入門
和田秀三著／A5／184頁／本体1480円
講義経験の豊富な著者が，大学初年級の読者を念頭におき，統計学の本質を具体的な例題できわめてわかりやすく解説した，好個な入門テキスト．

理工基礎 確率とその応用
逆瀬川浩孝著／A5／200頁／本体1800円
日常よく耳にする話題を中心に興味をそそられる例を示し，考える力を養うことに主眼を置いた．

概説 確率統計
前園宜彦著／A5／160頁／本体1350円
例題を中心に構成され，わかりやすい解説により，データの処理など統計的センスを身に付けることができる初学者向教科・参考書．

統計解析入門
篠崎信雄著／A5／312頁／本体2200円
具体的な諸例を通して，統計学の本質に迫る入門テキスト．慶應義塾大学総合政策学部における，著者の生きた講義をもとにまとめられた．

理工系 確率統計
中村忠・山本英二共著
A5／184頁／本体1450円
実際の現象をモデル化したり，解析できることを目標とし，例題や例を多く配置するなど工夫されている．

多変量解析法入門
永田靖・棟近雅彦共著
A5／256頁／本体2200円
しっかりした理論を身につけるため，簡単な例を2次程度の行列でどのように解析を進めていくのかを丁寧に解説した好個の教科・参考書．

情報科学のための確率入門
アルゴリズム・シミュレーションへの応用のために
玉木久夫著／A5／128頁／本体1300円
確率・統計の基礎と情報科学への応用を解説．

情報数学の基礎
寺田・中村・釈氏・松居共著／A5／176頁／本体1600円
基礎知識としては高等学校「数学I」のみを履修していれば理解できるよう構成された情報数学のテキスト．見開き形式．

ダイナミックシステムの統計的解析と制御
[新訂版]
赤池弘次・中川東一郎共著／A5／208頁／本体2300円
不規則変動を示すシステムの計算機制御を実現するための統計的方法を具体的にそくして解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学・化学テキスト

電磁気学入門
阿部龍蔵著／A5／256頁／本体1700円
「電流」という身近な対象から説きおこした丁寧な入門書．電磁気現象のシミュレーション・プログラムを付録に掲げている．

基礎 電磁気学
永田一清編／A5／208頁／本体1600円
主として工科系の大学初年級・高専・各種学校の学生を対象とした教科書・参考書．豊富な例題・問題を独力で解き理解させることを狙っている．

基礎 波動・光・熱学
永田一清編／A5／224頁／本体1700円
工科系の大学初年級および高専・各種学校等の学生のための，物理における基礎的教養科目の教科書・参考書．力学・電磁気学に続く3巻目．

熱・統計力学入門
阿部龍蔵著／A5／176頁／本体1700円
本書は高校物理程度の知識でわかるよう熱の性質を扱っている．斯学の基本事項を読みやすい形でまとめた恰好の教科・参考書である．

有機化学概説［増訂版］
杉森彰著／A5／256頁／本体1850円
前著に，ヘテロ元素化合物，有機金属化合物，化学物質の人体や環境に与える影響等についての記述を加え，内容のさらなる充実を図った．

工学のための 有機化学
荒井貞夫著／A5／256頁／本体1800円
現在1200万以上の種類があり，年間10万の新しい種類が作りだされている有機化合物について，工科を専攻とする読者が苦痛なく学習できる．

化学熱力学［新訂版］
渡辺啓著／A5／192頁／本体1650円
単位系はSIを中心にしてさらにわかりやすく工夫した．理工系の大学初年級，短大，高専，各種学校等の学生を対象とした好個の教科・参考書．

分析化学［新訂版］
綿抜邦彦著／A5／152頁／本体1500円
化学を十分に理解するまでに到っていない人々にも分かり易く解説．現代的な観点から，定評ある旧版を新訂．

工学のための分析化学
長島珍男著／A5／256頁／本体1900円
大学で化学を専攻する学部学生及び大学院生を対象とした分析化学の入門書．初学者にとって難解と思われる部分や数式的な表現を避け，わかりやすくまとめた好個の教科・参考書．

工学のための 高分子材料化学
川上浩良著／A5／224頁／本体1800円
見開き体裁で，数多くの図表を用いるなど，理解しやすいように工夫をこらした好個の教科・参考書となっている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

基礎理論とハードウェア

情報処理システム入門 ［第2版］

浦昭二・市川照久共編／A5／312頁／本体1800円
長年にわたり好評を博してきた前著の待望の改訂版．初めてコンピュータを学ぶ人や，自分のこれまでの知識を再整理しようとする人に最適．

計算機科学入門

M.A.アービブ・A.J.クフォーリ・R.N.モル共著
甘利・金谷・嶋田共訳／A5／248頁／本体2524円
オートマトンの理論，PascalとLispの入門書．論理回路，ブール代数などをわかりやすく解説した．

コンピュータサイエンスのための 離散数学

守屋悦朗著／A5／240頁／本体2400円
理論的コンピュータサイエンスの各分野で必要な斯学の中から特に基礎的事項を取り上げる．

形式言語とオートマトン

守屋悦朗著／A5／296頁／本体1900円
計算機科学の基礎理論，形式言語理論とオートマトン理論について左ページに本文，右ページに補足的な図や例などを配置し，分かりやすく解説．

オートマトン言語理論 計算論 I, II ［第2版］

J.E.ホップクロフト他著／野崎昭弘 他訳
A5／I：352頁／本体2800円
II：256頁／本体2600円
入門書として高い評価を得ている書の邦訳．

言語理論とオートマトン

J.E.ホップクロフト・J.D.ウルマン共著／野崎昭弘・木村泉共訳／A5／296頁／本体2816円
言語理論，オートマトンの標準的なテキストとして定評を得ている書の翻訳版．

アルゴリズムの設計と解析

A.V.エイホ・J.E.ホップクロフト・J.D.ウルマン共著／野崎昭弘・野下浩平共訳／A5／I巻：240頁，II巻：244頁／本体各2816円
著名な著者陣が斯学の最近の成果を集成した書．

アルゴリズム データ構造 計算論

横森貴著／A5／208頁／本体1700円
プログラム作成の準備として必要なアルゴリズムとそれに付随するデータ構造に関する基礎知識の習得を目的とした入門書．

アルゴリズムとプログラミング技法

野崎昭弘著／A5／176頁／本体1350円
本書は，具体的な問題を通して，能率がよく応用の広いプログラム技法や改良のコツを解説したアルゴリズムの入門書である．

アルゴリズム入門

C言語による計算
影井清一郎著／A5／288頁／本体1800円
「手順や理屈を考える面白さ」を読書自身で感じ取ってほしい，と願いを込めて書かれている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

脳と心をさぐる

ギブソン
生態学的視覚論
古崎敬他訳／A5／392頁／本体4175円
「アフォーダンス」により，改めて脚光を浴びるギブソンの名著．環境の中の知覚を詳細に解説．

思考と脳
考える脳のしくみ
渡邊正孝著／A5／216頁／本体1900円
思考と呼ばれる脳の機能とは一体何なのであろうか？ 気鋭の研究者である著者が，有名な「フィネアス・ゲージ」の脳損傷事故から研究の最先端に至るまで様々な角度から分かりやすく解説．

記憶と脳
過去・現在・未来をつなぐ脳のメカニズム
久保田競 編／松波・船橋・櫻井共著
A5／216頁／本体2200円
世界的にも活躍中の著者陣が，その研究成果を分かりやすく紹介する．

最新 運動と脳
体を動かす脳のメカニズム
松波謙一・内藤栄一共著／
A5／264頁／口絵4頁／本体2400円
科学における最後の秘境といわれる脳と運動の関係を気鋭の著者がわかりやすく解説する．

人間の言語情報処理
言語理解の認知科学
阿部純一・桃内佳雄・金子康朗・李光五共著／
A5／360頁／本体3600円
人間の言語理解のしくみの研究の最前線を紹介．

意識と脳
心の電源としての意識
山本健一著／A5／240頁／本体2200円
長年，臨床と研究の両面から意識の謎を追究してきた著者がその成果をまとめた意欲作．

感性の科学
感性情報処理へのアプローチ
辻三郎編／A5／224頁／本体2400円
情報科学と心理学の両面から取り組まれた学際的研究プロジェクトの成果を基に，人間の感性への科学的アプローチを紹介・解説する．

脳科学への招待
神経回路網の仕組みを解き明かす
松村道一著／A5／232頁／本体1900円
世界的規模で研究が進められている脳科学・神経科学の領域を概観するとともに，その必須の基礎的事項についてわかりやすく解説する．

ニューロサイエンス入門
松村道一著／A5／344頁／本体2700円
読者の予備知識を極力仮定せずに分かりやすく説きおこした最新の解説書．脳と心への多種多様なアプローチを一目で見渡せる．

映像の心理学
マルチメディアの基礎
中島義明著／B6／280頁／本体2400円
人間が情報として映像をどのように摂取しているのかをトピックスを中心として実証的データにもとづいて解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

心理学関連書(2)

グラフィック性格心理学

戸田まり・サトウタツヤ・伊藤美奈子共著　　A5 判／ 328 頁／本体 2450 円

本書は，性格心理学の現在を気鋭の著者陣が分かりやすく解説したテキスト・参考書です．「性格」について何が分かっていて何が分かっていないのか，臨床，発達，社会，歴史の観点から縦横に論じていきます．左頁に本文，右頁に図表を配した見開き形式・2 色刷により，視覚的な理解を助けます．

主要目次　臨床心理学から見た性格　今，学校現場で起こっている課題　精神病理に現代を見る　文化と性格　子どもの「性格」とは　人の輪の中で　生涯発達の時代　性格心理学の源流と成立　性格心理学の展開　性格心理学の新潮流：性格の可変性

ライブラリ ソーシャルスキルを身につける

4 親子のためのソーシャルスキル

渡辺弥生著　　四六判／ 264 頁／本体 1450 円

子育てもルールとコツがわかれば楽しくなるもの．本書は親子関係を豊かにし，子どもが人とかかわっていく力を育てる「スキル」をわかりやすく具体的に紹介します．

主要目次　ソーシャルスキルの大切さ　基本的な親子のソーシャルスキル　乳児期，幼児期，児童期，思春期・青年期の発達と必要なソーシャルスキル　親がストレスをためないための，8 つのソーシャルスキル

【既刊】 7 お年寄りと家族のためのソーシャルスキル　松田　修著　本体 1350 円

心理学セミナーテキストライブラリ

1 心理学のための レポート・卒業論文の書き方

杉本敏夫著　　B5 判／ 224 頁／本体 1900 円

心理学を学ぶ上で必要不可欠な実験・実習レポート，そして卒業論文．その書き方を，指導経験豊富な著者が多くの実例を掲げながら，分かりやすく解説しました．実験系のみならず臨床系も視野に入れ，実習・見学レポートの書き方，卒業論文でよく使われる質問紙の作成法も指南した，レポート・卒業論文手引き書の決定版です．読みながら基礎知識を参照できるよう，章末に囲み記事を収録しました．

主要目次　実験・実習レポートとは?　実験レポートの書き方　実験レポートの実例　実習・見学レポート　質問紙調査の進め方　卒業論文の進め方　卒業論文の実例

【既刊】 2 心理学のための英語案内　D. W. ラッカム・原　一雄共著　本体 1380 円
3 Q&A で知る統計データ解析　繁桝算男・柳井晴夫・森　敏昭編著　本体 2400 円

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社